АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том V

2

1960

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместители гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Л. А. ЖЕКУЛИН, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, А. Ф. ИОФФЕ, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь редакции Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том V ФЕВРАЛЬ, 1960 Вып. 2

СОДЕРЖАНИЕ

Гусев В. Д. Статистические свойства больших неоднородностей ионосферы . . 179
Каскинд М. Д. Возбуждение поверхностных электромагнитных волн на плоских диэлектрических покрытиях 188
Черняк Ю. Б. Приближенный метод расчета характеристик обнаружения многоканальных систем с коррелированными шумами при отборе амплитуд по наибольшему значению 198
Митяшев Б. Н. Об оптимальном способе определения временно́го положения импульсов 206
Герценштейн М. Е. Фазо-частотные искажения в смесителях. 214
Широков В. В. Воздействие амплитудно-модулированного сигнала на двухпетлевую систему автоматической регулировки усиления 218
Иванов В. Н. Вариационный метод расчета многопроводной линии 224
Богданов Е. В., Кислов В. Я., Чернов З. С. Взаимодействие электронного потока с плазмой 229
Гайдук В. И. О расчете наведенного тока при произвольном движении заряженных частиц 239
Игрицкий А. Л. Расчет траекторий электронов в периодическом фокусирующем устройстве ЛБВ 255
Власов А. Д. О бриллюэновских электронных потоках и концепции граничной частицы 264
Микаэлян А. Л., Столяров А. К., Коблова М. М. Резонансные ферритовые системы с большим вентильным отношением 269
Моносов Я. А. К теории нелинейных явлений в ферритах на СВЧ. Ч. II. Параметрические явления в феррите 278
Тычинский В. П., Деркач Ю. Т., Карпецкий В. В. Экспериментальное исследование ферритового усилителя 288
Бункин Ф. В. О параметрическом возбуждении квантовых систем 296
Берг М. А., Гаряинов С. А. Полупроводниковый двухэлектродный прибор с отрицательным сопротивлением 301
Конторович М. И. К вопросу о составлении уравнений для автогенераторов 310
Мельников Б. С. Формирование вершины импульса в блокинг-генераторе на плоскостном полупроводниковом триоде 323

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Иросин А. В. О зависимости мощности рассеяния от направленности антенн 330
Кац А. М. Применение рядов к решению некоторых задач ЛБВ и ЛОВ 333
Корнилов С. А., Емельянов А. Ф. Экспериментальное исследование клистронного делителя частоты с предварительной группировкой 336
Яблонский Ф. М. Определение предельных скоростей счета газоразрядных счетных ламп (декатронов) по характеристикам промежутка анод — катод 338
Бутров М. В. К теории концентрических неоднородностей конечной толщины в коаксиальном волноводе 341
Масленникова В. В. Расчет цилиндрических волноводов с поперечно намагниченным ферритом 345
Рябинкин Ю. С. Коэффициент передачи *pin*-транзистора 349

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Розанова Н. Б., Низяев В. В. Об одном способе переноса вещества между электродами вакуумного промежутка 351

Адрес редакции: Москва, К—9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроники АН СССР, редакция журнала «Радиотехника и электроника»

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-00415 Подписано к печати 5/II-1960 г. Тираж 5375 экз. Зак. 2473
Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Бум. л. 5,5 Печ.л. 15,07 Уч.-изд. л. 16,6

2-ая типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 2

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БОЛЬШИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ

В. Д. Гусев

Рассмотрены статистические и корреляционные свойства фазы волны при отражении последней от ионосферы, содержащей большие неоднородности. Анализ произведен на основе использования решения уравнения эйконала. Показано, что только при нормальном законе распределения углов прихода волны закон распределения скорости изменения фазы во времени не зависит от расстояния до ионосферы. Исследован статистический характер явления фокусировки большими неоднородностями ионосферы, могущего иметь существенное значение при фазовом методе изучения этих неоднородностей.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования распространения радиоволн, отраженных от ионосферы, показали изменчивость радиоволн во времени и пространстве. Основной причиной этого является наличие в ионосфере неоднородных образований. Совершенно ясно, что в условиях масштабов ионосферы следует ожидать образования в ней неоднородностей, размеры которых изменяются в широком спектре значений. Действительно, исследования солнечных и космических шумов [6], изменений углов прихода радиоволн, отраженных от ионосферы [7], и их группового запаздывания [8] привели к предположению о наличии в ионосфере неоднородностей с разнообразными размерами вплоть до значительных. При этом наименее изученными являются так называемые большие неоднородности с размерами порядка десятков и сотен километров. В то же время интерес к ним постоянно возрастает в связи с особым влиянием, которое они оказывают при распространении в ионосфере радиоволн различного диапазона. В частности, одной из причин сверхдальнего распространения ультракоротких радиоволн является существование больших неоднородностей [9].

В настоящее время пока нет серьезно обоснованных теоретически и подтвержденных экспериментально соображений о характере этих неоднородностей. С другой стороны, еще не решена полностью задача распространения радиоволн в сложно-неоднородной ионосфере. Все это заставляет прибегать к применению различных упрощенных моделей ионосферы, достаточно хорошо описывающих существо происходящих явлений.

Как известно, экспериментальные исследования свойств отраженных волн на разных частотах не показывают резкой зависимости средних свойств от частоты, т. е. средние свойства радиоволн, отраженных от разных уровней ионосферы, примерно одинаковы. Этот факт указывает, по-видимому, на то, что в изменении поля основную роль играют области отражения. Такая роль областей отражения следует из большого значения относительных вариаций коэффициента преломления в этих областях по сравнению с его вариациями в других областях при примерно одинаковых вариациях электронной концентрации. В связи с вышеизложенным, распространение радиоволн в реальной ионосфере вполне эквивалентно отражению радиоволн от некоторой эффективной неровной поверхности, состоящей из совокупности выпуклых и вогнутых зеркал [4]. Как известно, действие таких зеркал на отражающиеся волны состоит в фокусировке или дефокусировке поля волны при распространении в свободном про-

странстве. При случайном характере распределения неровностей эффективной отражающей поверхности этот эффект будет иметь случайный характер, в общем случае зависящий от расстояния до указанной поверхности. Экспериментальные исследования больших неоднородностей поля отраженных радиоволн действительно говорят о нерегулярном поведении их во времени и пространстве.

В этих условиях наиболее приемлемым является статистический метод анализа. Однако результаты его могут быть использованы для изучения свойств больших неоднородностей ионосферы только в том случае, если известны законы изменения плотности вероятности и корреляционных функций соответствующих величин при распространении волны в свободном пространстве. Каких-либо указаний на возможные результаты решения этих вопросов в литературе не имеется. В связи с вышеизложенным, в настоящей статье приводятся некоторые результаты статистического анализа свойств радиоволн, распространяющихся в свободном пространстве после рассеяния их на больших неоднородностях ионосферы.

1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЙКОНАЛА

Как известно, при отражении коротких радиоволн от ионосферы в случае нормального падения радиус зоны Френеля составляет примерно $3 \div 5$ *км*. В этих условиях анализ влияния больших неоднородностей на распространяющиеся в свободном пространстве радиоволны целесообразно производить на основе исследования уравнений приближения геометрической оптики с применением статистических методов.

Общий анализ уравнений геометрической оптики

$$(\operatorname{grad}\varphi)^2 = 1,$$

$$\operatorname{grad}\ln A \operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{2}\Delta\varphi,$$

где φ — эйконал, A — ее амплитуда волны, показывает, что основным является первое уравнение, уравнение эйконала. Очевидно также, что наиболее простой задачей является анализ решений уравнения эйконала. Таким образом, исходным является уравнение

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

с краевым условием $\varphi(x, y, z = 0) = f(x, y)$ при $z = 0$. Плоскость $z = 0$ соответствует началу отражающего ионосферного слоя, ось z направлена от ионосферы к земле.

В целях простоты и краткости изложения ограничимся случаем, когда $f = f(x)$. Тогда решение уравнения эйконала записывается в виде

$$\varphi = f(u) + \sqrt{z^2 + (x-u)^2}, \tag{2}$$

где u определяется из выражения

$$x - u = \frac{z\frac{df(u)}{du}}{\sqrt{1 - \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2}}. \tag{3}$$

Очевидно, что решение будет действительным, если для всех значений u выполнено неравенство

$$\left|\frac{df(u)}{du}\right|_{\text{макс}} < 1. \tag{4}$$

Геометрически решение уравнения (3) соответствует нахождению коор-

инат точек пересечения двух кривых

$$v_1 = x - u, \quad v_2 = z\frac{df(u)}{du} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{df(u)}{du}\right)}.$$

Условием единственности этого пересечения и соответственно решения (2) является неравенство

$$\left|\frac{dv_1}{du}\right| > \left|\frac{dv_2}{du}\right|$$

или

$$z\left|\frac{d^2f(u)}{du^2}\right| \Big/ \left[1 - \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2\right]^{1/2} < 1,$$

имеющее место для каждого значения u. Очевидно, что оно эквивалентно

$$z\left|\frac{d^2f(u)}{du^2}\right|_{\text{макс}} = \varkappa_0 < \left[1 - \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2_{\text{макс}}\right]^{1/2}. \qquad (5)$$

Если рассматриваются лишь малые углы, т. е. $\left|\frac{df}{du}\right|_{\text{макс}} \ll 1$, то (5) имеет наиболее простой вид: $\varkappa_0 < 1$. Из общих соображений очевидно, что неоднозначность решения (2) соответствует приходу нескольких лучей, т. е. наличию фокуса. В связи с этим $\varkappa_0$ может быть названо параметром фокусировки.

При нерегулярном, хаотическом распределении больших неоднородностей и соответственно эйконала общие статистические закономерности полностью описываются n-мерной плотностью вероятности $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ случайной непрерывной функции f [3], где $f_1 = f(u + \xi_1)$, $f_2 = f(u + \xi_2), \ldots, f_n = f(u + \xi_n)$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — некоторые фиксированные смещения координат. Из W_n посредством соответствующих операций может быть получено $W(df/du)$, $W(d^2f/du^2)$ и т. д. Так как в общем случае W отлично от нуля на всем интервале $(\pm\infty)$ соответствующих случайных величин, то это значит, что случайные непрерывные функции df/du, d^2f/du^2 могут принимать любые значения. Но тогда неравенства (4) и (5) в обычном понимании не выполнены и, следовательно, использование решения (2) не обосновано. По этой причине смысл решений (2) и неравенств (4) и (5) должен быть дополнен статистической трактовкой. Основанием к этому служит тот факт, что различные значения случайных функций имеют различную вероятность, причем значения, сильно отличающиеся от среднего, имеют весьма малую вероятность P и практически могут считаться нереализуемыми [1]. Таким образом, для любой случайной функции ψ имеет место соотношение

$$P\left[\frac{|\psi - \overline{\psi}|}{\sigma_\psi} \geqslant \gamma\right] = 1 - p(\gamma),$$

где $p(\gamma)$ определяется законом распределения $W(\psi)$, а σ^2_ψ — дисперсия случайной функции ψ. В случае нормального закона

$$P\left[\frac{|\psi - \overline{\psi}|}{\sigma_\psi} \geqslant 1\right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2/2}\,dt = 1 - \Phi(\gamma).$$

Обычно считают, что при $\gamma = 2$ вероятность P достаточно мала. В частности, в этом случае при нормальном законе $P = 0{,}05$. Все сказанное с равным основанием может быть отнесено как к $df(u)/du$, так и к $d^2f(u)/du^2$. Поскольку $\overline{df(u)/du} = \overline{d^2f(u)/du^2} = 0$, то с весьма высокой

вероятностью, равной $p(\gamma)$, можно считать, что значения $df(u)/du$ и $d^2f(u)/du^2$ лежат, в основном, внутри относительных интервалов $\pm\gamma$:

$$\left|\frac{df(u)}{du}\right| \leqslant \gamma\sigma_{f'}, \quad \left|\frac{d^2f(u)}{du^2}\right| \leqslant \gamma\sigma_{f''}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{df(u)}{du}\right|_{\text{макс}} = \gamma\sigma_{f'}.$$

В результате условие (4) действительности решения (2) приобретает вероятностный характер:

$$\gamma\sigma_{f'} < 1. \tag{7}$$

Аналогичным способом получается вероятностная трактовка условия (5) единственности решения (2):

$$z\left|\frac{d^2f(u)}{du^2}\right|_{\text{макс}} = z\gamma\sigma_{f''} = \gamma\varkappa_0 < [1-(\gamma\sigma_{f'})^2]^{3/2}, \tag{8}$$

где $\varkappa_0$ — параметр фокусировки.

В условиях обычно наблюдающихся малых углов рассеяния радиоволн от ионосферы, т. е. при $\sigma_{f'} \ll 1$, (8) приобретает наиболее простой вид: $\varkappa_0 < 1/\gamma$. Это условие говорит о том, что решение уравнения эйконала будет однозначно с вероятностью $p(\gamma)$, т. е. фокусы будут отсутствовать.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЙКОНАЛА

При исследовании статистически однородных процессов особый интерес представляет знание характера изменения законов распределения фазы и ее производных при распространении волны в свободном пространстве и выяснение тех условий, когда эти законы не изменяются. Как известно, статистически однородными процессами называются процессы, для которых выполняется соотношение

$$\widetilde{\overline{F(\psi)}} = \overline{F(\psi)}, \tag{9}$$

где

$$\overline{F(\psi)} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi)\, W(\psi)\, d\psi, \quad \widetilde{\overline{F(\psi)}} = \lim_{x_0\to\infty} \frac{1}{2x_0} \int_{-x_0}^{x_0} F[\psi(x)]\, dx,$$

а F — какая-либо произвольная функция, для которой соответствующие интегралы существуют.

В связи со взаимно-однозначной связью плотности вероятности W и характеристической функции Θ, достаточно исследования изменения характеристических функций эйконала и углов прихода рассеянной волны в свободном пространстве. Вид решения для эйконала (2) не позволяет получить каких-либо простых закономерностей изменения плотности вероятности в функции z, приемлемых для практических задач. По этой причине перейдем непосредственно к анализу $W\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ и $W\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$. Если в общем случае f является функцией времени, т. е. $f = f(u, t)$, то из (2) при помощи (3) легко получить, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial f(u,t)}{\partial u}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{df(u,t)}{dt}, \tag{10}$$

где u является решением уравнения (3).

В соответствии с (9) и (10) характеристические функции $\Theta(\eta_1)$ для $\partial\varphi/\partial x$ и $\Theta(\eta_2)$ для $d\varphi/dt$ равны:

на уровне $z \neq 0$

$$\Theta_0(\eta_1) = \lim_{u_0\to\infty} \frac{1}{2u_0} \int_{-u_0}^{u_0} \exp\left(i\eta_1 \frac{\partial f}{\partial u}\right) du,$$

$$\Theta_0(\eta_2) = \lim_{u_0\to\infty} \frac{1}{2u_0} \int_{-u_0}^{u_0} \exp\left(i\eta_2 \frac{df}{dt}\right) du,$$

на уровне z

$$\begin{aligned} \Theta(\eta_1) &= \lim_{x_0\to\infty} \frac{1}{2x_0} \int_{-x_0}^{x_0} \exp\left(i\eta_1 \frac{\partial f}{\partial u}\right) dx = \lim_{u_0\to\infty} \frac{1}{2u_0} \int_{-u_0}^{u_0} \exp\left(i\eta_1 \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{dx}{du}\, du, \\ \Theta(\eta_2) &= \lim_{x_0\to\infty} \frac{1}{2x_0} \int_{-x_0}^{x_0} \exp\left(i\eta_2 \frac{df}{dt}\right) dx = \lim_{u_0\to\infty} \frac{1}{2u_0} \int_{-u_0}^{u_0} \exp\left(i\eta_2 \frac{df}{dt}\right) \frac{dx}{du}\, du, \end{aligned} \tag{11}$$

где dx/du выражается через u при помощи (3). При условии $\sigma_f \ll 1$

$$\frac{dx}{du} = 1 + z\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \tag{12}$$

и интегрирование производится по всем значениям u, удовлетворяющим (7) и (8), причем, согласно (8) и (12), $dx/du > 0$. В результате оказывается, что (согласно (6) $\partial f/\partial u$ — ограниченная величина) в общем случае $\Theta_0(\eta_1) = \Theta(\eta_1)$, но

$$\Theta_0(\eta_2) \neq \Theta(\eta_2) = \Theta_0(\eta_2) + z \lim_{u_0\to\infty} \frac{1}{2u_0} \int_{-u_0}^{u_0} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \exp\left(i\eta_2 \frac{df}{dt}\right) du.$$

Только в случае нормального закона распределения $W\left(\frac{df}{dt}\right)$ и соответственно $W\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)$ $\Theta_0(\eta_2) = \Theta(\eta_2)$, так как тогда $\partial^2 f/\partial u^2$ и df/dt независимы и $\overline{\partial^2 f/\partial u^2} = 0$. Как известно, зависимость двух нормально распределенных величин определяется коэффициентом корреляции, который в данном случае пропорционален

$$R \sim \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{df}{dt}} = -\sigma^2 \lim_{\xi,\,\tau\to 0} \frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\tau}\rho(\xi,\tau),$$

где

$$\sigma^2 = \overline{f}^2 - \overline{f}^2; \quad \rho(\xi,\tau) = \frac{\overline{f(u)\,f(u+\xi)} - \overline{f(u)}^2}{\overline{[f(u)]^2} - \overline{f(u)}^2}.$$

Так как $\rho(\xi,\tau) = \text{const}$ является центральной поверхностью в силу $\rho(\xi,\tau) = \rho(-\xi,-\tau)$, то вблизи единицы функция $\rho(\xi,\tau)$ может быть представлена следующим рядом:

$$\rho(\xi,\tau) = 1 + a_1\xi^2 + 2a_2\xi\tau + a_3\tau^2 + a_4\xi^4 + 4a_5\xi^3\tau + 6a_6\xi^2\tau^2 + 4a_7\xi\tau^3 + a_8\tau^4 + \ldots.$$

Отсюда после дифференцирования и перехода к пределу согласно (12) получается $R = 0$. Таким образом, плотность вероятности не зависит от z в двух случаях: 1) для $\partial\varphi/\partial x$ при произвольном виде $W(\partial\varphi/\partial x)$, 2) для $d\varphi/dt$ при нормальном законе распределения $W(d\varphi/dt,\ \partial\varphi/\partial x)$. Можно показать также, что эти результаты будут иметь место для всей возможной области значений $\sigma_{\partial f}$, удовлетворяющих неравенству (7).

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЭЙКОНАЛА

Как указывалось выше, наряду с законом распределения большую роль при проведении экспериментальных исследований играет функция корреляции, посредством которой определяются средние статистические размеры неоднородностей (радиус корреляции). Радиус корреляции r является мерой ширины пространственной коррелятивной функции и с точностью до множителя порядка нескольких единиц совпадает с

$$r = \sqrt{\frac{1}{-\frac{d^2\rho(\xi)}{d\xi^2}\Big|_{\xi=0}}}.$$

Если измеряемой величиной является $\psi(x)$, то

$$\rho(\xi) = \frac{\overline{\psi(x)\,\psi(x+\xi)} - \overline{\psi}^2}{\overline{\psi^2} - \overline{\psi}^2}.$$

При этом очевидно, что $-\sigma^2 \frac{d^2\rho(\xi)}{d\xi^2}\Big|_{\xi=0} = \overline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}$ и

$$r = \sqrt{\frac{\sigma_\psi^2}{\overline{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2}}}. \tag{13}$$

Таким образом, для определения средних размеров неоднородностей в зависимости от способа измерения необходимо будет вычислить $\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}$ — измерение вариаций эйконала, $\overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2}$ — измерение вариаций углов прихода, $\overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,dt}\right)^2}$ — измерение вариаций скорости эйконала $d\varphi/dt$, чтобы выяснить, в каких случаях и как зависят средние определяемые размеры неоднородностей от расстояния до ионосферы z.

Прежде всего из независимости от z характеристической функции для $\partial\varphi/\partial x$ следует, что $\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}_{z=0}$, т. е. что пространственные размеры, определяемые посредством измерения вариаций фазы, не зависят от z. Далее, на основании (10)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial u\,dt}\frac{du}{dt}.$$

В результате, аналогично (11) с учетом (12)

$$\overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2} = \lim_{u_0\to\infty}\frac{1}{2u_0}\int_{-u_0}^{u_0}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)^2\frac{du}{1+z\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}},$$

$$\overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,dt}\right)^2} = \lim_{u_0\to\infty}\frac{1}{2u_0}\int_{-u_0}^{u_0}\frac{\partial^2 f}{\partial u\,dt}\frac{du}{1+z\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}.$$

Если использовать (9) и (6), то

$$\overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2} = \sigma_1^2 \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{y_1^2}{1+\varkappa_0 y_1} W(y_1)\, dy_1,$$

$$\overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, dt}\right)^2} = \sigma_2^2 \int_{-\gamma}^{\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{y_2^2}{1+\varkappa_0 y_1} W(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2,$$

где $\sigma_1^2 = \overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)^2}$; $\sigma_2^2 = \overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\, dt}\right)^2}$. При нормальном законе распределения

$$W(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-R^2)}(y_1^2 + y_2^2 - 2Ry_1 y_2)\right],$$

где R — коэффициент корреляции между y_1 и y_2, поэтому

$$\overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2} = \frac{\sigma_1^2}{\varkappa_0^2}(y_1 - y_2),\quad \overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, dt}\right)^2} = \frac{\sigma_2^2}{\varkappa_0^2}[R^2(y_1 - y_2) + \varkappa_0^2(1-R^2)\, y_1], \qquad (14)$$

где

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{dy}{1+\varkappa_0 y} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right);\quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \Phi(\gamma). \qquad (15)$$

Так как во всем интервале $(\pm\gamma)$ интегрирования $|\varkappa_0 y| < 1$, то

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-y^2/2}\left[\sum_1^{\infty}(-1)^n \varkappa_0^n y^n\right] dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-y^2/2} \times$$

$$\times \left[\sum_1^{\infty} \varkappa_0^{2n} y^{2n}\right] dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{\exp(-y^2/2)}{1-\varkappa_0^2 y^2}\, dy,$$

что законно в силу абсолютной сходимости интегралов. В целях упрощения выкладок и сведения y_1 к табулированным функциям использована следующая аппроксимация:

$$\frac{1}{1-\varkappa_0^2 y^2} \leqslant \exp\left[-\frac{y^2}{\gamma^2}\ln(1-\gamma^2\varkappa_0^2)\right].$$

В результате

$$y_1 \leqslant \frac{\Phi\left[\gamma\sqrt{1+\frac{2}{\gamma^2}\ln(1-\gamma^2\varkappa_0^2)}\right]}{\sqrt{1+\frac{2}{\gamma^2}\ln(1-\gamma^2\varkappa_0^2)}}. \qquad (16)$$

Таким образом, на основании (13), (14), (15), (16)

$$r_1 = \frac{r_{01}\varkappa_0}{\sqrt{y_1 - y_2}} = g_0 r_{01}$$

при измерении вариаций углов прихода, т. е. $\partial\varphi/\partial x$, и

$$r_2 = \frac{r_{02}\varkappa_0}{\sqrt{R^2(y_1 - y_2) + (1-R^2)\varkappa_0^2 y_1}}$$

при измерении вариаций $d\varphi/dt$, причем наибольший эффект будет при $R = 1$, т. е.

$$r_2 \leqslant \frac{r_{02}\varkappa_0}{\sqrt{y_1 - y_2}} = g_0 r_{02}$$

Величина $g_0 = \varkappa_0 / \sqrt{y_1 - y_2}$, которая может быть названа фактором фокусировки, изменяется от единицы при $\varkappa_0 = 0$ до малых значений при $\varkappa_0\gamma \to 1$. Таким образом оказывается, что только лишь при измерении больших неоднородностей методом регистрации вариаций эйконала отраженной волны измеряемые размеры полностью соответствуют таковым на выходе волны из ионосферы.

При использовании других методов регистрации больших неоднородностей всегда имеет место фокусировка. Уменьшение измеряемых размеров зависит от фактора фокусировки g_0. Так как основной интерес представляет знание размеров r_0 неоднородностей при выходе волны из ионосферы, то очень существенно знать, чему равно $\varkappa_0$ в условиях каждого эксперимента. Согласно (13) и (8),

$$\varkappa_0 = z\sigma_{f'} = \frac{z\sigma_{\varphi'}}{r_0},$$

так как $\sigma_{f'} = \sigma_{\varphi'}$. Непосредственно r_0 определяется только при измерениях вариаций φ, поэтому при измерениях вариаций $\partial\varphi/\partial x$ или $d\varphi/dt$ $\varkappa_0$ не может быть определено и судить о величине r_0 затруднительно.

В условиях указанных измерений можно определить $\varkappa = \frac{z}{r}\sigma_{\varphi'}$ и $g(\varkappa)$. Но так как $r < r_0$, то $\varkappa > \varkappa_0$ и $g > g_0$, и по величине g можно судить о существенности или о несущественности эффектов фокусировки. Если $g \sim 1$, то очевидно эффекты фокусировки несущественны и $r \sim r_0$. Изложенные результаты справедливы при $\sigma_{\varphi'} \ll 1$, $2\varkappa_0 < 1$ и нормальном законе распределения $W(\partial f/\partial u)$, $W(df/dt)$. Случаи нарушения условия $2\varkappa_0 < 1$ требуют исследования фазы волны, распространяющейся в свободном пространстве с учетом дифракционных эффектов, которые имеют место в области фокуса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследования больших неоднородностей слоя F_2 ионосферы при помощи регистрации вариаций $d\varphi/dt$ и φ приведены в [5]. Исследования показали, что $d\varphi/dt$ имеет нормальный закон распределения. Тогда при вполне естественных соображениях о независимости

Таблица

Параметр	Время суток				Примечание
	ночь	утро	день	вечер	
Δ, км	200	105	110	132	
$\sigma^0_{\varphi'}$	2,5	2,1	1,8	2,5	
$\varkappa_0$	0,26	0,42	0,34	0,40	300 км
g_0	0,99	0,78	0,91	0,80	
$\varkappa_0$	0,22	0,35	0,28	0,33	250 км
g_0	0,99	0,92	0,98	0,95	

временны́х ($\partial\varphi/\partial t$) и пространственных ($\partial\varphi/\partial x$) изменений следует [2] нормальный закон распределения для $\partial\varphi/\partial t$ и $\partial\varphi/\partial x$, так как $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} v_д + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, где $v_д$ — скорость дрейфа. При этом оказалось, что $\sigma_{\varphi'} \ll 1$.

В соответствии с (10) $\partial f / \partial u$ и df/dt также имеют нормальный закон распределения. Следствием этого является нормальный закон распределения $\partial^2 f / \partial u^2$. Таким образом, основные положения, использованные в настоящей работе, вполне реализуются при исследованиях больших неоднородностей ионосферы. В связи с этим по данным корреляционного анализа вариаций φ [5] оказалось возможным оценить $\varkappa_0$ и фактор фокусировки g_0. Расчеты проведены для направлений вдоль малых осей характеристических эллипсов больших неоднородностей. Для сравнения использованы два значения высоты начала отражающего слоя F_2: $z = 300$ и $z = 250$ *км* $\left(\varkappa_0 = \frac{4z}{\Delta}\sigma_{\varphi'}, \text{ так как } \Delta = 4r_0\right)$ (см. таблицу).

Для направлений вдоль больших осей характеристических эллипсов $g_0 > 0{,}99$.

Таким образом, в дневное и ночное время фокусировка в среднем не имеет существенного значения, и измерения больших неоднородностей могут проводиться различными способами (регистрация вариаций φ, $d\varphi/dt$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$).

В утренние и вечерние часы размеры больших неоднородностей, определяемые способом регистрации вариаций $d\varphi/dt$ и $\partial\varphi/\partial x$, могут быть в среднем искажены до 20% в зависимости от значения высоты начала отражающего слоя, причем в отдельных случаях эти изменения могут быть еще бо́льшими.

В заключение следует отметить, что в условиях анизотропии неоднородностей фокусировка может приводить к увеличению характера анизотропии (к увеличению отношения большой и малой осей характеристического эллипса) рассеянных в ионосфере радиоволн, что следует учитывать при обработке экспериментального материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Романовский, Математическая статистика, Государственное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1938.
2. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГТИ, 1954.
3. В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд. Советское радио, 1951.
4. В. Д. Гусев, Л. А. Драчев, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 6, 747.
5. В. Д. Гусев, Л. А. Драчев, С. Ф. Миркотан, Ю. В. Березин, М. П. Кияновский, М. Б. Виноградова, Т. А. Гайлит, Докл. АН СССР, 1958, 123, 5, 817.
6. A. Hewish, Proc. Roy. Soc., 1952, 214, 494.
7. E. N. Bramley, Proc. Roy. Soc., 1953, 220, 1140.
8. C. N. Munro, Proc. Roy. Soc., 1950, 202, 1069.
9. S. Stein, J. Geophys. Res., 1958, 63, 217.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Поступила в редакцию
19 VII 1958

1960 № 2

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЯХ

М. Д. Хаскинд

Рассматривается проводящая плоскость, покрытая диэлектрической пленкой, и исследуется электромагнитное поле над этой плоскостью, возбуждаемое заданными источниками.

Для решения задачи принимаются упрощенные граничные условия на поверхности диэлектрического покрытия и развивается метод определения полного волнового поля, при помощи которого в простой форме производится выделение поверхностных волн. Общий метод прилагается к анализу возбуждения поверхностных волн электрическими и магнитными диполями и их распределениями. Полученные результаты могут быть использованы для усовершенствования расчетов плоских антенн поверхностных волн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим проводящую плоскость, покрытую тонким слоем диэлектрика толщины d, имеющего диэлектрическую и магнитную проницаемости ε и μ. В некоторой области, ограниченной поверхностью S, расположены источники электромагнитного поля (рис. 1). Полагаем далее, что все величины поля зависят от времени через экспоненциально-временной множитель $\exp(i\omega t)$, который в дальнейшем опускаем.

Обозначим через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ напряженности поля в вакууме над покрытием, а через $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ — в диэлектрическом слое; тогда на поверхности диэлектрического покрытия имеем обычные условия

$$\left.\begin{aligned} &E_x = E'_x,\ E_y = E'_y,\ E_z = \varepsilon' E'_z,\\ &H_x = H'_x,\ H_y = H'_y,\ H_z = \mu' H'_z \end{aligned}\right\} \quad \text{при } z = 0\left(\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0},\ \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}\right). \tag{1}$$

На проводящей плоскости примем граничные условия Леонтовича [1]

$$E'_x = -\rho_k H'_y,\ E'_y = \rho_k H'_x \quad \text{при } z = -d\left(\rho_k = \left(\frac{\mu_k}{\varepsilon_k}\right)^{1/2}\right), \tag{2}$$

где ε_k и μ_k — комплексные проницаемости проводящей среды, причем здесь и в дальнейшем используем практическую рационализированную систему единиц. В соответствии с этим ε_0 и μ_0 — проницаемости вакуума, а ε', μ', ε'_k и μ'_k — относительные проницаемости.

В связи с малой толщиной диэлектрического слоя условия (1) и (2) можно значительно упростить, исключив из рассмотрения поле в диэлектрике [2]. В самом деле, положим $knd \ll 1$, где $k = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ — волновое число в вакууме; $n = (\varepsilon'\mu')^{1/2}$ — коэффициент преломления, тогда в разложениях величин $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ по z можно ограничиться первыми двумя членами в промежутке $(0, -d)$. В результате приходим к следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &E_x - d\left(\frac{1}{\varepsilon'}\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\omega\mu H_y\right) = -\rho_k\left[H_y - d\left(\frac{1}{\mu'}\frac{\partial H_z}{\partial y} - i\omega\varepsilon E_x\right)\right],\\ &E_y - d\left(\frac{1}{\varepsilon'}\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\omega\mu H_x\right) = \rho_k\left[H_x - d\left[\frac{1}{\mu'}\frac{\partial H_z}{\partial x} + i\omega\varepsilon E_y\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{при } z = 0 \tag{3}$$

Точность условий (3) оценивается порядком малых величин $\rho_k' = (\mu_k'/\varepsilon_k')^{1/2}$ и knd, поэтому слагаемыми, содержащими их произведения, следует пренебречь. Учитывая это, имеем окончательную форму упрощенных граничных условий

$$E_x - d_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\rho_0 (\rho_k' + ikn^2 d_0) H_y,$$
$$E_y - d_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} = \rho_0 (\rho_k' + ikn^2 d_0) H_x \qquad \text{при } z = 0 \qquad (4)$$

($d_0 = d/\varepsilon'$, $\rho_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 120\pi$ *ом*), отличающуюся от принятой в [2] тем, что в последней частично сохранены слагаемые, содержащие произведения указанных малых величин.

Определение возбуждаемого заданными источниками электромагнитного поля над плоскостью $z = 0$ проведем при помощи электрического и магнитного векторов Герца Π_e и Π_m, используя соотношения

$$\mathbf{H} = \frac{ik}{\rho_0} \operatorname{rot} \Pi_e,$$
$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_e + k^2 \Pi_e. \qquad (5)$$

$$\mathbf{E} = -ik\rho_0 \operatorname{rot} \Pi_m,$$
$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_m + k^2 \Pi_m. \qquad (6)$$

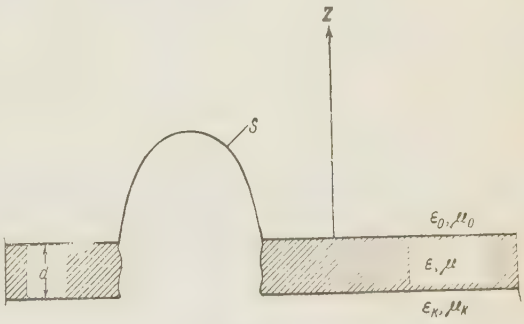


Рис. 1

Положим, что источники ориентированы вдоль осей x и z ($\Pi_{ey} = \Pi_{my} = 0$). Тогда в результате подстановки (5) и (6) в (4) находим условия для составляющих векторов Герца при $z = 0$:

$$M_1 \Pi_{ex} = 0, \quad M_2 \Pi_{ez} = \left(p_0 + \frac{1}{d_0}\right) \frac{\partial \Pi_{ex}}{\partial x}, \qquad (7)$$

$$M_2 \Pi_{mx} = 0, \quad M_1 \Pi_{mz} = -(1 + p_0 d_0) \frac{\partial \Pi_{mx}}{\partial x}, \qquad (8)$$

где M_1 и M_2 — дифференциальные операторы:

$$M_1 = \frac{\partial}{\partial z} + p_0, \quad M_2 = \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2\right), \quad p_0 = -\frac{ik}{\rho_k' + ikn^2 d_0}. \qquad (9)$$

Здесь p_1 и p_2 — корни характеристического уравнения

$$p^2 + \frac{1}{d_0} p + \frac{ik}{d_0} \rho_k' - k^2 (n^2 - 1) = 0, \qquad (10)$$

$$p_1 \simeq d_0 k^2 (n^2 - 1) - ik\rho_k', \quad p_2 \simeq -\frac{1}{d_0} - d_0 k^2 (n^2 - 1) + ik\rho_k', \qquad (11)$$

причем $\operatorname{Im} p_0 < 0$, $\operatorname{Im} p_1 < 0$ и $\operatorname{Im} p_2 > 0$, так как $\operatorname{Re} \rho_k > 0$; $\operatorname{Im} \varepsilon \leqslant 0$ и $\operatorname{Im} \mu \leqslant 0$.

Для немагнитных металлических поверхностей $\rho_k' = \frac{1}{2} k\Delta (1 + i)$, где Δ — толщина скин-слоя, и, следовательно, в сантиметровом диапазоне $|\rho_k'| \simeq 10^{-4}$.

В этом случае для идеального диэлектрического слоя комплексный характер значений p_0, p_1 и p_2 выражен весьма слабо и они близки к

действительным значениям, соответствующим идеально проводящей плоскости, покрытой идеальным диэлектриком. В другом предельном случае $d_0 = 0$ граничные условия (7) и (8) определяют значения векторов Герца при заданном комплексном импедансе ρ_k' и, в частности, излучение радиоволн над плоской полупроводящей землей в приближенной постановке граничных условий Леонтовича.

Граничные условия (7) и (8) допускают свободные решения следующего вида:

$$f_0 = e^{-pz} g_0(x, y), \quad \Delta g_0 + (p^2 + k^2) g_0 = 0, \tag{12}$$

Физически допустимыми в верхнем полупространстве ($z \geqslant 0$) являются только те решения, которые соответствуют характеристическому числу с положительной вещественной частью. Такие решения определяют поверхностные волны, возбуждаемые на диэлектрическом покрытии. Из выражений (9) и (11) видно, что для немагнитных поверхностей ($\mu_k' = 1$), покрытых слоем идеального диэлектрика, $\operatorname{Re} p_0 < 0$, $\operatorname{Re} p_1 > 0$ и $\operatorname{Re} p_2 < 0$. Следовательно, на таких диэлектрических покрытиях возбуждаемые поверхностные волны связаны с характеристическим числом p_1.

2. МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Для определения полного волнового поля и выделения из него поверхностных волн рассмотрим вспомогательную задачу об определении функции $\varphi(x, y, z)$, регулярной в верхнем полупространстве вне поверхности S и удовлетворяющей волновому уравнению

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \tag{13}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = 0 \text{ при } z = 0 \quad (p = p_r + ip_i). \tag{14}$$

Введем другую функцию $f(x, y, z)$, удовлетворяющую волновому уравнению

$$\Delta f + k^2 f = 0 \tag{15}$$

и связанную с функцией $\varphi(x, y, z)$ соотношением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{16}$$

Условие (14) позволяет продолжить функцию f в нижнее полупространство четным образом. В результате получаем функцию, регулярную и однозначную во всем пространстве вне поверхности $S + S^*$, где S^* — зеркальное отображение поверхности S в нижнем полупространстве, причем на бесконечности функция f удовлетворяет принципу излучения.

К соотношению (16), в частности, сводятся сформулированные выше задачи после соответствующего выделения особенностей. Так, например, для вертикального электрического диполя ($\Pi_{ex}^{(1)} = 0$), расположенного в точке $B_0(0, 0, z_0)$, можно положить

$$\Pi_{ez}^{(1)} = \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} + \psi,$$

$$r_1 = (r_0^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}, \quad r_2 = (r_0^2 + (z + z_0)^2)^{1/2}, \quad r_0^2 = x^2 + y^2, \tag{17}$$

где r_1 и r_2 — расстояния между точкой $A(x, y, z)$ и точками B_0 и

$B_0^*(0, 0, -z_0)$, а функция $\psi(x, y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению и регулярна при всех $z \geqslant 0$. Из условий (7) получаем соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + p_1 \varphi = -\frac{2}{d_0} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-ikr_2}}{r_2}\right), \quad \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial z} + p_2 \psi, \tag{18}$$

которое в силу регулярности справедливо уже во всем пространстве.

Если функция f найдена, то из соотношения (16) можно единственным путем определить функцию φ, удовлетворяющую волновому уравнению (13) и условию (14) и являющуюся ограниченной во всем верхнем полупространстве вне поверхности S. Один из простых методов определения функции φ, предложенный в [3], заключается в аналитическом продолжении соотношения (16) на комплексную плоскость z. В комплексной плоскости свободные решения вида (12) не допускаются, так как при $z = \mp i\infty$ они становятся неограниченными соответственно для $p_i > 0$ и $p_i < 0$; поэтому при $p_i < 0$ полное решение уравнения (16), удовлетворяющее волновому уравнению, можно представить в форме

$$\varphi = e^{-pz} \int_{-i\infty}^{z} e^{p\zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta \quad (p_i < 0). \tag{19}$$

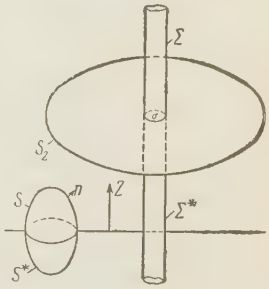


Рис. 2

Если $p_r < 0$, контурный интеграл в (19) легко преобразовать в интеграл по действительной оси (∞, z). В результате получаем выражение, которое также вытекает из (16), поскольку при $p_r < 0$ свободные решения вида (12) невозможны. Если же $p_r > 0$, выражение (19) содержит в скрытой форме ту часть решения, которая определяет возбуждаемые поверхностные волны. Выделение этой части решения из выражения (19) в общем случае затруднительно, и мы дадим другой метод определения полного волнового поля, позволяющий в эффективной форме выделить возбуждаемые поверхностные волны для произвольно заданной функции f. В частном виде этот метод применялся в теории поверхностных гравитационных волн [4,5].

Дифференцируя соотношение (16) по z и используя (13), (15) и (16), находим уравнение

$$\frac{\partial^2(\varphi - f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\varphi - f)}{\partial y^2} + h^2(\varphi - f) = p\left(\frac{\partial f}{\partial z} - pf\right) \quad (h^2 = k^2 + p^2). \tag{20}$$

Параметр h, входящий в уравнение (20), определяем таким образом, чтобы $\operatorname{Re} h > 0$, т. е.

$$h = h_r + ih_i \text{ при } p_i p_r > 0, \quad h = h_r - ih_i \text{ при } p_i p_r < 0 \quad (h_i > 0). \tag{21}$$

Для решения уравнения (20) рассмотрим круг S_z бесконечно большого радиуса с центром в точке $A(x, y, z)$, расположенный параллельно границе $z = 0$ и выше поверхности S. Вырежем в области S_z круг σ бесконечно малого радиуса с центром в той же точке A (рис. 2). Тогда, применяя формулу Грина в области $S_z - \sigma$ к функциям $\varphi - f$ и $H_0(hr)$ и учитывая (20), получаем выражение (см. [5])

$$\varphi = f \mp \frac{p}{4i} \iint_{S_z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - pf\right) H_0(hr)\, dS \quad (r = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{1/2}), \tag{22}$$

где $H_0(hr)$ — функция Ханкеля второго при $\operatorname{Im} h \leqslant 0$ и первого при

$\operatorname{Im} h > 0$ родов; r — расстояние между точками $A(x, y, z)$ и $A_0(\xi, \eta, z)$ в области S_z, причем здесь и в дальнейшем верхний знак берется при $\operatorname{Im} h \leqslant 0$, а нижний — при $\operatorname{Im} h > 0$.

Формулу (22) легко преобразовать к более простому виду. С этой целью проведем два вертикальных цилиндра Σ и Σ^*, опирающихся на круг σ и простирающихся неограниченно вверх и вниз (рис. 2). Далее еще раз воспользуемся формулой Грина для функций f и $g_1 = H_0(hr) \times \exp(-p(z-\zeta))$, удовлетворяющих волновому уравнению, где ξ, η и ζ — текущие координаты области интегрирования и $\zeta = z$ на S_z. В результате будем иметь

$$\iint_{S_\pm} \left(\frac{\partial f}{\partial n} g_1 - f \frac{\partial g_1}{\partial n}\right) dS = 0 \qquad (S_+ = S_z - \sigma + \Sigma, \qquad S_- = S_z - \sigma + S + S^* + \Sigma^*),$$

где интегрирование производится по S_+ и S_- соответственно при $p_r < 0$ и $p_r > 0$. Стягивая вертикальные цилиндры к их оси и принимая во внимание (22), приходим к простым формулам

$$\varphi = e^{-pz} \int_{\infty}^{z} e^{p\zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta \qquad \text{при } p_r < 0, \tag{23}$$

$$\varphi = e^{-pz} \int_{-\infty}^{z} e^{p\zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta + \varphi_0 \qquad \text{при } p_r > 0, \ \varphi_0 = \pm \frac{ip}{4} \iint_{S+S^*} \left(\frac{\partial f}{\partial n} g_1 - f \frac{\partial g_1}{\partial n}\right) dS. \tag{24}$$

Функция φ_0 в (24) характеризует поверхностные волны, возбуждаемые на границе $z = 0$. Кроме этого в сформулированных выше задачах всегда имеет место $p_i p_r \leqslant 0$, т. е. $\operatorname{Im} h \leqslant 0$ и потому, как и должно быть, поверхностные волны распространяются во все стороны от источников возбуждения.

Для плоского поля, возбуждаемого источниками, заключенными внутри цилиндрической поверхности S, образующая которой параллельна оси x, функции φ и f зависят только от y и z, и легко видеть, что интегрирование в (24) для функции φ_0 сводится к интегрированию по поперечному контуру $L + L^*$ цилиндрической поверхности $S + S^*$. В самом деле, на основании формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0(h(t^2 + q^2)^{1/2})\, dt = \frac{2}{h} e^{\mp ihq} \qquad (q = |y - \eta|)$$

получаем выражение

$$\varphi_0 = \pm \frac{ip}{2h} \int_{L+L^*} \left(\frac{\partial f}{\partial n} g_2 - f \frac{\partial g_2}{\partial n}\right) dl, \quad g_2 = e^{-p(z-\zeta) \mp ih|y-\eta|}, \tag{25}$$

определяющее плоские поверхностные волны.

Пусть мы имеем функцию простейшего вида $f = \exp(-ikr_2)/r_2$, тогда подынтегральное выражение в (24) для φ_0 содержит сосредоточенную особенность в точке $B_0^*(0, 0, -z)$, и поэтому, стягивая поверхность $S + S^*$ к этой точке, найдем

$$\varphi_0 = -\pi i p e^{-p(z+z_0)} H_0^{(2)}(hr_0) \qquad (\operatorname{Im} h \leqslant 0, \ r_0 = (x^2 + y^2)^{1/2}). \tag{26}$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае на основании формул (19), (24) и (26) устанавливаем соотношение

$$e^{-pz} \int_{-i\infty}^{z} \frac{e^{p\zeta - ikr_2'}}{r_2'} d\zeta = e^{-pz} \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{p\zeta - ikr_2'}}{r_2'} d\zeta + \pi i e^{-p(z+z_0)} H_0^{(2)}(hr_0) \tag{27}$$

$$(p_r > 0, \ p_i < 0, \ r_2' = (r_0^2 + (\zeta + z_0)^2)^{1/2}).$$

3. ДИПОЛЬНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Рассмотрим некоторые применения полученных общих результатов. Прежде всего определим функцию Герца $\Pi_{ez}^{(1)}$ вертикального электрического диполя. Для этого случая имеем соотношения (17) и (18), в которых для немагнитных поверхностей ($\mu_k' = 1$), покрытых слоем идеального диэлектрика, $p_{1r} > 0$ и $p_{2r} < 0$; поэтому, воспользовавшись формулами (23), (24) и (26), будем иметь

$$\Pi_{ez}^{(1)} = \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} - \frac{2}{d_0(p_1 - p_2)}\left[p_1 e^{-p_1 z}\int_{-\infty}^{z}\frac{e^{p_1\zeta - ikr_2'}}{r_2'}\,d\zeta - \right.$$

$$\left. - p_2 e^{-p_2 z}\int_{\infty}^{z}\frac{e^{p_2\zeta - ikr_2'}}{r_2'}\,d\zeta + \pi i p_1 e^{-p_1(z+z_0)}H_0^{(2)}(h_1 r_0)\right] \quad (h_1 = h(p_1)). \qquad (28)$$

Выражение (28) является точным решением сформулированной задачи, но содержит излишние порядки величин по отношению к принятой точности упрощенных граничных условий (4). В самом деле, из (9) и (11) видно, что характеристические числа p_0 и p_2 обратны по порядку числу p_1. Вследствие этого при больших $|p|$ имеем разложение

$$p\int_{\infty}^{z} e^{p(\zeta - z)}u(r_0, \zeta)\,d\zeta = u(r_0, z) - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots, \qquad (29)$$

на основании которого равенство (28) упрощается к виду

$$\Pi_{ez}^{(1)} = \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} + 2d_0\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-ikr_2}}{r_2} - 2p_1 e^{-p_1 z}\int_{-\infty}^{z}\frac{e^{p_1\zeta - ikr_2'}}{r_2'}\,d\zeta + \Pi_0, \qquad (30)$$

$$\Pi_0 = -2\pi i p_1 e^{-p_1(z+z_0)}H_0^{(2)}(h_1 r_0). \qquad (31)$$

Пусть теперь в точке $B_0(0, 0, z_0)$ имеем горизонтальный электрический диполь. В этом случае вектор Герца $\Pi_e^{(2)}$ имеет две составляющие: $\Pi_{ex}^{(2)}$ и $\Pi_{ez}^{(2)}$, определяемые из условий (7) и соотношений (23), (24), (26), (29). В результате получим

$$\Pi_{ex}^{(2)} = \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} + 2\left(\frac{i}{k}\rho_k' - n^2 d_0\right)\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-ikr_2}}{r_2}, \qquad (32)$$

$$\Pi_{ez}^{(2)} = 2\left((n^2 - 1)d_0 - \frac{i}{k}\rho_k'\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikr_2}}{r_2}. \qquad (33)$$

Аналогичным путем из условий (8) находим выражения для составляющих магнитного вектора Герца Π_m; при этом имеют место соотношения

$$\Pi_{mx}^{(1)} = 0, \quad \Pi_{mz}^{(1)} = \Pi_{ex}^{(2)}, \quad \Pi_{mx}^{(2)} = \Pi_{ez}^{(1)}, \quad \Pi_{mz}^{(2)} = \Pi_{ez}^{(2)}, \qquad (34)$$

где $\Pi_m^{(1)}$ и $\Pi_m^{(2)}$ — векторы Герца вертикального и горизонтального магнитных диполей.

Выражения (30) — (34) показывают, что при принятой точности граничных условий поверхностные волны возбуждаются на диэлектрическом покрытии вертикальным электрическим и горизонтальным магнитным диполями и их распределениями. Горизонтальный электрический и вертикальный магнитный диполи также возбуждают поверхностные волны, но значительно меньшего порядка, который превосходит точность упрощенных граничных условий (4). Отметим, еще, что при $d_0 = 0$ и $z_0 = 0$ форму-

лы (32) и (33) переходят в известные выражения для вектора Герца горизонтального электрического диполя, расположенного на поверхности полупроводящей земли [6].

Представляет практический интерес оценить, с каких расстояний от источников возбуждения электромагнитное поле переходит в поле поверхностных волн. В связи с этим рассмотрим функцию $F(r_0, z, z_0) = \Pi_{cz}^{(1)} - \Pi_0$ и оценим ее значения при $z = 0$ в частном случае низко расположенного диполя ($z_0 = 0$). Из соотношений (30) и (31) после замены переменных $\zeta = -r_0 \operatorname{sh}\theta$ получим

$$F(r_0, 0, 0) = -\frac{2}{r_0}\int_{\infty}^{0} e^{-r_0(p_1 \operatorname{sh}\theta + ik \operatorname{ch}\theta)}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\theta} + ikr_0\right)\operatorname{th}\theta d\theta.$$

Интегрируя по частям и оценивая остаток, найдем

$$F(r_0, 0, 0) = \frac{2ik}{p_1^2 r_0^2} e^{-ikr_0} + O(r_0^{-3}). \tag{35}$$

С другой стороны, при больших r_0 для Π_0 имеем

$$\Pi_0(r_0, 0, 0) = -2\pi i p_1 \left(\frac{2}{\pi h_1 r_0}\right)^{1/2} e^{-i(h_1 r_0 - \pi/2)}. \tag{36}$$

Положим для простоты $\rho_k' = 0$, тогда, сопоставляя амплитудные значения в (35) и (36), определяем расстояние r_0, начиная с которого практически имеет место только одно поле поверхностных волн,

$$r_0 \geqslant \frac{k^{2/3}}{p_1^2}\left(\frac{h_1}{2\pi}\right)^{1/3}. \tag{37}$$

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Выясним, в какой мере концентрируется излучаемая электромагнитная энергия в поверхностных волнах. Для этого вычислим средний поток электромагнитной энергии через вертикальный цилиндр большого радиуса r_0, опирающийся своим основанием на диэлектрическое покрытие. Пользуясь цилиндрической системой координат r_0, θ и z, имеем общее выражение

$$P_0 = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{\infty} dz \int_0^{2\pi} (E_\theta H_z^* - E_z H_\theta^*)\, r_0 d\theta, \tag{38}$$

где значения **E** и **H** рассматриваются в зоне поверхностных волн и поэтому величина P_0 представляет собой среднюю мощность электромагнитной энергии, переносимой поверхностными волнами.

В дальнейшем ограничимся простейшими линейными распределениями источников электромагнитного поля в предположении идеального диэлектрического слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости ($\rho_k' = 0$, $p_1 > 0$). Вначале рассмотрим вертикальный электрический вибратор, расположенный над покрытием. В этом случае имеем только одну вертикальную составляющую электрического вектора Герца Π_e, определяемую в виде

$$\Pi_e = -\frac{ip_0}{4\pi k}\int_{a-l_1}^{a+l_2} I(z_0)\,\Pi_{ez}^{(1)}(r_0, z, z_0)\, dz_0, \tag{39}$$

где $I(z_0)$ — функция распределения электрического тока на отрезке провода $(a - l_1,\ a + l_2)$; $\Pi_{ez}^{(1)}$ — функция Герца вертикального электрического

ıполя, представленная соотношениями (30) и (31), причем в зоне по-ерхностных волн имеем асимптотическое равенство

$$\Pi_e(r_0, z) = -\frac{ip_1\rho_0}{4\pi k}\left(\frac{8\pi}{h_1 r_0}\right)^{1/2} N_e e^{-p_1 z - ih_1 r_0}, \tag{40}$$

$$N_e = \int_{a-l_1}^{a+l_2} I(z_0)\, e^{-p_1 z_0}\, dz_0.$$

На основании (5), (38) и (40) получаем простое соотношение

$$P_0 = \frac{p_1 h_1^2}{4k}\rho_0 |N_e|^2. \tag{41}$$

Точно так же при наличии магнитных токов $I_m(x_0)$, распределен-ıх на отрезке $(-l, l)$, параллельном оси x, можно установить подобное отношение:

$$P_0 = \frac{p_1}{8\pi k\rho_0}\int_0^{2\pi} |N_m(\theta)|^2 (p_1^2\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta)\, d\theta,$$

$$N_m = e^{-p_1 z_0}\int_{-l}^{l} I_m(x_0)\, e^{ih_1(x_0\cos\theta + y_0\sin\theta)}\, dx_0, \tag{42}$$

е y_0 и z_0 — координаты точки, через которую проходит горизонталь-й отрезок магнитного тока.

Соотношения (41) и (42) позволяют в конкретных случаях рассчи-ть сопротивление и проводимость излучения поверхностных волн, если даны распределения $I(z_0)$ и $I_m(x_0)$. Остановимся несколько более тально на симметричном электрическом вибраторе ($l_1 = l_2 = l$), для горого в рамках обычных предположений примем $I(u) = I_0 \sin k(l - |u|)$ ($u = z_0 - a$) и в соответствии с этим для асимптотической ха-ктеристики N_e получим

$$N_e = \frac{2}{h_1^2} I_0 e^{-p_1 a}(k(\cos kl - \cos 2kl \operatorname{ch} p_1 l) + p_1 \sin 2kl \operatorname{sh} p_1 l). \tag{43}$$

Для определенности рассмотрим полуволновый вибратор ($kl = \pi/2$), зко расположенный над диэлектрическим покрытием ($a \simeq l$). Тогда из) и (43) сопротивление излучения поверхностных волн определяется виде

$$R_0 = \frac{2P_0}{I_0^2} = 60\pi\frac{\alpha}{1+\alpha^2}(1 + e^{-\pi\alpha})^2 \quad \left(\alpha = 2\pi\frac{d_0}{\lambda}(n^2 - 1)\right). \tag{44}$$

Расчеты показывают, что величина R_0 обладает максимумом порядка) *ом* в диапазоне малых значений d/λ, а именно при $d_0/\lambda \simeq 0{,}075 \cdot (^2 - 1)^{-1}$, что для диэлектрического слоя из полистирола ($\varepsilon' = 2{,}6$, $= 1$) приводит к значению $d/\lambda \simeq 0{,}14$.

Напомним, что развитый выше метод определения функции Герца яется приближенным и дает лишь главную часть этой функции, зна-ия которой тем ближе к точным, чем меньше d/λ. В то же время ргетические характеристики (41), (42) и (44) являются квадратич-ми, поэтому они верны для несколько более широкого диапазона чений d/λ.

Полученное столь большое экстремальное значение сопротивления излу-ия поверхностных волн полуволнового вибратора указывает на то, что давляющая часть всей излучаемой энергии концентрируется в поверхност-х волнах. Иными словами, уже с небольших расстояний от вибратора ктромагнитное поле переходит в поле поверхностных волн. В самом деле,

если для указанного экстремального значения d_0/λ воспользоваться неравенством (37), то получим $r_0/\lambda \geqslant 0{,}4$. В действительности же для полуволнового вибратора высотное распределение токов благоприятствует более быстрому переходу к поверхностным волнам, и из аналогично устанавливаемого критерия можно найти, что $r_0/\lambda \geqslant 0{,}25$. Таким образом, в экстремальном режиме уже при $r_0 = \lambda$ амплитуда поверхностных волн в несколько раз превосходит амплитуду пространственных волн, распространяющихся вдоль диэлектрической пленки.

Приведенный частный результат показывает, что для каждого вида возбудителя можно расчетным путем найти оптимальные значения d_0/λ с точки зрения наибольшей концентрации излучаемой электромагнитной энергии в поверхностных волнах и, следовательно, можно получить необходимые данные для различных возбудителей. Окончательное суждение следует дополнить сопоставлением сопротивления излучения поверхностных волн с полным сопротивлением излучения. Для частного случая вертикального электрического вибратора комплексная мощность определяется выражением

$$P_{\text{к}} = -\int_{a-l_1}^{a+l_2} I^*(z)\, E_z(0, z)\, dz.$$

Подставляя сюда E_z из (5), затем интегрируя по частям и учитывая, что ток в проводе принимается удовлетворяющим уравнению $I''(z) + k^2 I(z) = 0$, получим следующее выражение:

$$P_{\text{к}} = -\left[I^* \frac{\partial \Pi_e(0, z)}{\partial z} - \frac{\partial I^*}{dz} \Pi_e(0, z) \right]_{z=a-l_1}^{z=a+l_2}. \tag{45}$$

Значения $\Pi_e(r_0, z)$ при $r_0 \neq 0$ определяются из (39), (30) и (31). Для того чтобы определить Π_e при $r_0 = 0$, будем считать p_1 комплексным, т. е. учтем ρ_k' и воспользуемся соотношением (27), после чего уже можно положить $r_0 = 0$. В результате имеем

$$\Pi_{ez}^{(1)}(0, z, z_0) = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,\ \Pi_1 = \frac{e^{-ik|z-z_0|}}{|z-z_0|},\ \Pi_2 = \frac{e^{-ik(z+z_0)}}{z+z_0},$$
$$\Pi_3 = 2d_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik(z+z_0)}}{z+z_0} - 2p_1 e^{-p_1(z+z_0)} \int_{-i\infty}^{z+z_0} \frac{e^{(p_1-ik)t}}{t}\, dt. \tag{46}$$

Смысл отдельных слагаемых очевиден. Заметим только, что поскольку Π_3 определяет ту часть вектора Герца, которая обусловлена диэлектрическим слоем и конечной проводимостью плоскости и оценивается порядком малых величин d_0 и p_1, то нет необходимости в выражении для Π_3 сохранять более высокие порядки этих величин в точках провода; поэтому для рассматриваемых значений z и z_0 можем пренебречь экспоненциальными множителями с p_1 и тогда, после преобразования пути интегрирования, будем иметь упрощенное выражение

$$\Pi_3 = 2d_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-ik(z+z_0)}}{z+z_0} - 2p_1 Ei[-ik(z+z_0)],$$
$$Ei(-ix) = \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-iu}}{u}\, du = ci(x) - isi(x). \tag{47}$$

На основании (45) — (47) находим полное комплексное сопротивление вибратора в следующей форме:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3, \tag{48}$$

где Z_1 — сопротивление вибратора в свободном пространстве; Z_2 — сопро-

ивление, обусловленное идеально проводящей плоскостью. Величиной Z_3 учитывается влияние диэлектрического слоя и конечной проводимости плоскости. Выражения для Z_1 и Z_2 хорошо известны, а сопротивление Z_3 может быть выражено через интегральные синус и косинус и элементарные функции. В частности, для полуволнового вибратора находим

$$Z_3 = -60i\,(kd_0\,(n^2-1) - i\rho_k')\,H_1 + 30i\,(kd_0 n^2 - i\rho_k')\,H_2,$$

$$H_1 = Ei\,(-iu_1) + 2Ei\,(-iu_0) + Ei\,(-iu_{-1}), \qquad (49)$$

$$H_2 = e^{-iu_0}\left(\ln\frac{u_0}{u_{-1}} - \ln\frac{u_1}{u_0}\right) + e^{iu_0}\,(2Ei\,(-2iu_0) - Ei\,(-2iu_1) - Ei\,(-2iu_{-1})),$$

$$u_1 = \pi\left(4\,\frac{a}{\lambda} + 1\right),\quad u_0 = 4\pi\,\frac{a}{\lambda},\quad u_{-1} = \pi\left(4\,\frac{a}{\lambda} - 1\right).$$

Если в (49) положить $d_0 = 0$, получим значение Z_3 полуволнового вибратора, расположенного над полупроводящей средой, анализировавшееся в [7], которое, однако, приведено там в неправильном виде.

ЛИТЕРАТУРА

. М. А. Леонтович, О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел, Исследования по распространению радиоволн, Сб. II, Изд. АН СССР, 1948, 5—12.

. Н. А. Арманд, Распространение поверхностных электромагнитных волн вдоль многопроводной системы, ЖТФ, 1959, **29**, 1, 107.

. Г. Д. Малюжинец, Об одном обобщении формулы Вейля для волнового поля над поглощающей плоскостью, Докл. АН СССР (новая серия), 1948, **60**, 3, 367.

. М. Д. Хаскинд, Дифракция волн вокруг движущегося цилиндрического судна, Прикл. матем. и механ., 1953, **17**, 4, 431.

. М. Д. Хаскинд, О волновых движениях тяжелой жидкости, Прикл. матем. и механ., 1954, **18**, 1, 15.

. Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ОНТИ, 1937, 937—968.

. У. Л. Барроу, Импеданц вертикальной полуволновой антенны над землей конечной проводимости, Проектирование и расчет антенн, Сб. статей, Государственное издательство по технике связи, 1936, 70—76.

Поступила в редакцию
29 V 1959

1960 № 2

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ШУМАМИ ПРИ ОТБОРЕ АМПЛИТУД ПО НАИБОЛЬШЕМУ ЗНАЧЕНИЮ

Ю. Б. Черняк

Рассмотрен приближенный метод расчета величины ложной тревоги в n-канальной системе с коррелированными шумами при отборе амплитуд по наибольшему значению.

Получено асимптотическое выражение для интегрального двумерного распределения амплитуд огибающих на выходе линейного детектора.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время при обнаружении слабых сигналов в шумах применяются многоканальные системы. В таких системах каждый канал рассчитывается на оптимальную работу при некотором фиксированном значении заранее неизвестного параметра сигнала, например частоты несущей. Для наилучшего решения задачи о присутствии сигнала выходы всех каналов должны быть объединены.

В связи с тем, что полезная информация (сигнал) находится только в одном или в нескольких каналах, а шумы присутствуют во всех каналах, многоканальность неизбежно приводит к потерям. Величина потерь зависит от числа каналов и от того, насколько хорошо выбран способ объединения каналов. Если к обнаружению сигнала подходить с точки зрения теории Неймана — Пирсона, то для нахождения оптимального способа объединения необходимо находить коэффициент правдоподобия [1]. Однако во многих случаях оптимальная обработка оказывается настолько сложной, что ее осуществление практически невыполнимо. В таких случаях применяют более простые способы обработки, практическое осуществление которых не встречает затруднений. В настоящей работе рассмотрена именно одна из таких простых обработок, широко используемая при построении многоканальных систем, — отбор амплитуд огибающих по максимальному значению. При такой обработке решение о наличии сигнала принимается всякий раз, когда по крайней мере одна из амплитуд огибающих $r_1, r_2, \ldots, r_n$ превысит порог U_0. При этом, как и всегда, возможны ошибки двух типов: ложное обнаружение и пропуск сигнала. Огибающие на выходе n каналов описываются n-мерным законом распределения: $W_{ns}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — если сигнал есть, или $W_n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — если сигнала нет Величина порога U_0 и отношение сигнала к шуму q^2 должны быть выбраны так, чтобы вероятности ложного обнаружения и пропуска не превышали заданных значений P_F и $(1 - P_D)$. Очевидно, что

$$P_F = 1 - \int_0^{U_0}\int_0^{U_0}\ldots\int_0^{U_0} W_n(r_1, r_2, \ldots, r_n)\, dr_1 \ldots dr_n, \tag{1}$$

$$P_D = 1 - \int_0^{U_0}\int_0^{U_0}\ldots\int_0^{U_0} W_{ns}(r_1, r_2, \ldots, r_n)\, dr_1 \ldots dr_n. \tag{2}$$

Будем считать, что на входе каналов с перекрывающимися частотными характеристиками и с одинаковой энергетической полосой пропускания

имеется белый шум. В этом случае огибающие на выходе каналов между собой коррелированы, а распределение огибающих на выходе каждого канала является релеевским с одинаковой дисперсией σ^2:

$$W_1(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}. \tag{3}$$

Можно показать, что коэффициент корреляции мгновенных напряжений шумов на входе детекторов каналов с частотными характеристиками $K_1(i\omega)$ и $K_2(i\omega)$ в совпадающие моменты времени равен

$$\rho_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K_1(i\omega)\, K_2^*(i\omega)\, d\omega}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K_1(i\omega)|^2\, |K_2(i\omega)|^2\, d\omega}},$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину.

В [2] показано, что распределение огибающих $W_n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ можно представить в виде ряда по бесселевым функциям. В частном случае при $n = 2$ распределение будет двумерным райсовским [3]:

$$W_2(r_1, r_2) = \frac{r_1 r_2}{(1-\rho^2)\sigma^4} e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}} I_0\left[\frac{r_1 r_2 \rho}{(1-\rho^2)\sigma^2}\right], \tag{4}$$

где σ^2 — дисперсия шумов; ρ — коэффициент корреляции на входе детектора; $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Для решения задачи об обнаружении сигнала необходимо: 1) по заданной величине P_F найти порог U_0; 2) при найденном пороге U_0 найти зависимость между P_D и отношением сигнала к шуму. Для решения первой части задачи необходимо найти интеграл (1). В случае каналов с независимыми шумами (1) сведется к

$$P_F = 1 - (1 - e^{-U_0^2/2\sigma^2})^n, \tag{5}$$

однако при коррелированных шумах интеграл не берется даже в простейшем случае при $n = 2$. Следует отметить, что при $n = 2$ для выражения (1) известно разложение в ряд [4]

$$P_F = 1 - (1-\rho^2) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho^n \gamma_n)^2, \tag{6}$$

где

$$\gamma_n = \frac{1}{n!} \int_0^z x^n e^{-x} dx; \qquad z = \frac{U_0^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}$$

Для малых значений P_F ряд (6) сходится очень медленно и при вычислениях необходимо учитывать большое количество членов. В [5] найден первый член разложения (1) по степеням ρ_{ik}, справедливого только при слабой корреляции шумов соседних каналов.

Решение второй части задачи сводится к вычислению (2) при известном U_0. Однако вычисление (2) может быть существенно упрощено. При рассматриваемом способе объединения каналов отбирается канал с наибольшим значением амплитуды огибающей. Этим каналом с пренебрежимо малой ошибкой (при $P_D > 0{,}5$) является тот, в котором находится сигнал. Таким образом, вторая часть задачи сводится к изве-

стной задаче об обнаружении сигнала в одноканальной системе с известным порогом U_0:

$$P_D = 1 - \int_0^{U_0} W_{1s}(r)\, dr, \tag{7}$$

где [3]

$$W_{1s}(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+s^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{rs}{\sigma^2}\right), \tag{8}$$

s — амплитуда сигнала.

Исходя из изложенного, представляет практический интерес нахождение порога U_0 в n-канальной системе с коррелированными шумами при отборе амплитуд огибающих по наибольшему значению. В настоящей работе получено асимптотическое выражение для $P_F < 10^{-2}$ при $n = 2$ и рассмотрен приближенный метод расчета вероятности ложной тревоги в многоканальной системе.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД

Для двухканальной системы выражение (1) сведется к

$$P_F = 1 - \int_0^{U_0}\int_0^{U_0} W_2(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \tag{9}$$

где $W_2(r_1, r_2)$ дается выражением (4). В то же время

$$P_F = P\{r_1 \text{ или } r_2 > U_0\} = P\{r_1 > U_0\} + P\{r_2 > U_0\} - P\{r_1 \text{ и } r_2 > U_0\}, \tag{10}$$

где, согласно (3),

$$P\{r_1 > U_0\} = P\{r_2 > U_0\} = e^{-U_0^2/2\sigma^2}, \tag{11}$$

а по определению вероятность совпадения

$$P\{r_1 \text{ и } r_2 > U_0\} = \int_{U_0}^{\infty}\int_{U_0}^{\infty} W_2(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2. \tag{12}$$

Вводя $x_1 = r_1/\sigma$; $y_1 = r_2/\sigma$; $\beta = U_0/\sigma$ и заменяя $I_0(x)$ в выражении (4) асимптотическим разложением

$$I_0(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \tag{13}$$

получим

$$P\{r_1 \text{ и } r_2 > U_0\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho(1-\rho^2)}} \int_{\beta}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty} \sqrt{x_1 y_1}\, e^{-\frac{x_1^2+y_1^2-2\rho x_1 y_1}{2(1-\rho^2)}} dx_1 dy_1 \tag{14}$$

при условии, что $\beta^2 \frac{\rho}{1-\rho^2} \gg 1$. Переходя к повернутой на 45° системе координат x, y:

$$x_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}},$$

$$y_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

получим

$$P\{r_1 \text{ и } r_2 > U_0\} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi\rho(1-\rho^2)}} \int_0^{\infty} \int_{\sqrt{2}\beta+y}^{\infty} \sqrt{x^2-y^2}\, e^{-\frac{x^2+y^2-\rho(x^2-y^2)}{2(1-\rho^2)}} dx dy. \tag{15}$$

При малых вероятностях ложной тревоги $\beta > 1$, а подынтегральная функция в выражении (15) всегда положительна и быстро убывает с ростом x и y, поэтому основной вклад будут давать точки, расположенные в окрестности точки $x = \sqrt{2\beta}$, $y = 0$. Для этих точек $y/x \ll 1$ и, следовательно,

$$\sqrt{x^2 - y^2} \simeq x\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \ldots\right]. \tag{16}$$

Учитывая первый член разложения (16), получим

$$P\{r_1 \text{ и } r_2 > U_0\} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi\rho\,(1-\rho^2)}} \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy \int_{\sqrt{2\beta}+y}^\infty x e^{-\frac{x^2}{2(1+\rho)}}\, dx. \tag{17}$$

Полученный интеграл легко привести к виду

$$P\{r_1 \text{ и } r_2 > U_0\} \simeq \frac{1+\rho}{2\sqrt{\rho}} e^{-\beta^2/2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}}\,\beta\right)\right], \tag{18}$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\, dy$ — функция ошибок. Подставляя (18) в (9), получим следующее асимптотическое выражение для P_F:

$$P_F \simeq e^{-\beta^2/2}\left\{2 - \frac{1+\rho}{2\sqrt{\rho}}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}}\,\beta\right)\right]\right\}, \tag{19}$$

справедливое при выполнении двух условий:

$$\beta > 1, \quad \frac{\beta^2\rho}{1-\rho^2} \gg 1. \tag{20}$$

Оба этих условия обычно выполняются. Отметим, что в предельном случае при $\rho = 1$ получим, как и следовало ожидать, выражение для вероятности ложной тревоги в каждом канале: $P_F = e^{-\beta^2/2}$. Вместо вычисления остаточных членов, которые должны получиться при учете отброшенных членов разложений (13) и (16), в таблице произведено сравнение вероятности ложной тревоги $P_F^{\sim}$, рассчитанной по (19), с точными величинами P_F^T, найденными из (9) путем численного расчета.

Таблица

β	$\rho = 0{,}5$		$\rho = 0{,}7$		$\rho = 0{,}9$	
	P_F^T	$P_F^{\sim}$	P_F^T	$P_F^{\sim}$	P_F^T	$P_F^{\sim}$
3,0	$2{,}122\cdot10^{-2}$	$2{,}122\cdot10^{-2}$	$1{,}986\cdot10^{-2}$	$1{,}986\cdot10^{-2}$	$1{,}675\cdot10^{-2}$	$1{,}674\cdot10^{-2}$
3,2	$1{,}154\cdot10^{-2}$	$1{,}155\cdot10^{-2}$	$1{,}086\cdot10^{-2}$	$1{,}087\cdot10^{-2}$	$9{,}189\cdot10^{-3}$	$9{,}190\cdot10^{-3}$
3,4	$6{,}013\cdot10^{-3}$	$6{,}019\cdot10^{-3}$	$5{,}694\cdot10^{-3}$	$5{,}701\cdot10^{-3}$	$4{,}829\cdot10^{-3}$	$4{,}833\cdot10^{-3}$
3,6	$3{,}006\cdot10^{-3}$	$3{,}000\cdot10^{-3}$	$2{,}863\cdot10^{-3}$	$2{,}857\cdot10^{-3}$	$2{,}439\cdot10^{-3}$	$2{,}434\cdot10^{-3}$
3,8	$1{,}441\cdot10^{-3}$	$1{,}442\cdot10^{-3}$	$1{,}381\cdot10^{-3}$	$1{,}381\cdot10^{-3}$	$1{,}182\cdot10^{-3}$	$1{,}183\cdot10^{-3}$

Как видно из таблицы, погрешность формулы (19) не превышает 0,5% при $\beta \geqslant 3{,}0$ и $\rho \geqslant 0{,}5$. При больших значениях β погрешность будет еще меньше. На рис. 1 помещены графики вероятностей ложных тревог для P_F от 10^{-2} до 10^{-8} при $\rho = 0$; 0,7; 0,9; 1,0, рассчитанных по выражению (19). Из выражения (19) вытекает важное следствие: с уменьшением величины ложной тревоги влияние корреляции шумов уменьшается.

В пределе при $\beta \gg 1$ и $\rho \neq 1$, но отличном от нуля, из (19) получим $P_F \simeq 2e^{-\beta^2/2}$, т. е. ту же вероятность ложной тревоги, что и при независимых шумах. Для оценки влияния корреляции шумов при различных уровнях ложной тревоги рассмотрим отношение

$$\alpha = \frac{P_{F \text{ при } \rho=0} - P_F}{P_{F \text{ при } \rho=0}}. \qquad (21)$$

Так как

$$P_F = P_{F \text{ при } \rho=0}(1-\alpha), \qquad (22)$$

величину α можно рассматривать как относительную поправку, которая

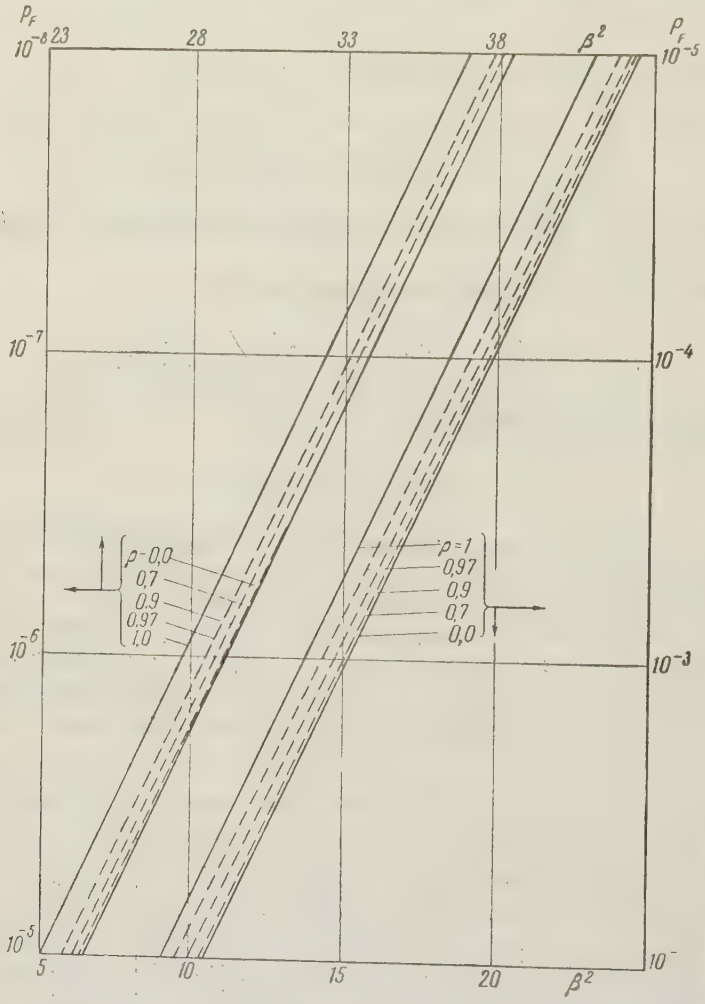


Рис. 1. Вероятность ложной тревоги в двухканальной системе при различных коэффициентах корреляции

получается из-за корреляции шумов. Сравнивая (19) и (22), а также учитывая (14), получим для α следующее выражение:

$$\alpha = \frac{1+\rho}{4\sqrt{\rho}}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{2(1+\rho)}}\,\beta\right)\right], \qquad (23)$$

справедливое при выполнении условий (20) (по определению при $\rho = 0$ $\alpha = 0$). На рис. 2 в двойном логарифмическом масштабе представлена

зависимость α от величины вероятности ложной тревоги в каждом канале:

$$P_0 = e^{-\beta^2/2}.$$

Из рисунка видно, что влияние корреляции быстро уменьшается с увеличением величины порога и с уменьшением коэффициента корреляции. Так, при $P_0 = 10^{-6}$ значение относительной поправки α составляет 26% для $\rho = 0{,}97$; 11,5% для $\rho = 0{,}9$; 1,4% для $\rho = 0{,}7$ и 0,1% для $\rho = 0{,}5$.

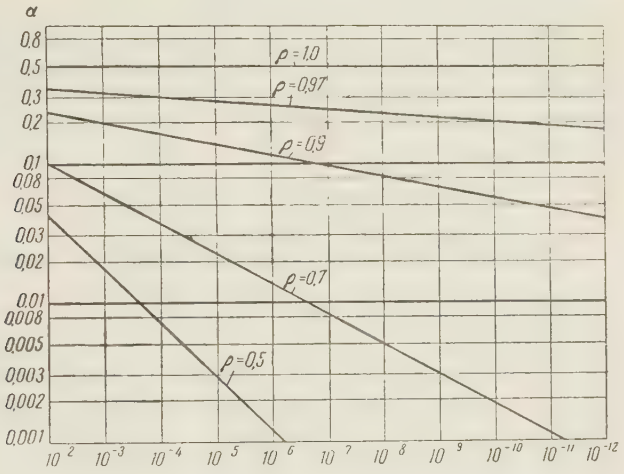


Рис. 2. Влияние корреляции при различных уровнях ложной тревоги

Для $\rho = 1{,}0$ $\alpha = 0{,}5$ независимо от величины β. Уменьшение влияния корреляции с ростом величины порога можно объяснить следующим образом. По определению коэффициента корреляции огибающих [3]

$$\rho^2 \simeq \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty (r_1 - a)(r_2 - a) W_2(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2}{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2},$$

где $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma$ — среднее значение релеевского распределения. При $\rho = 1$ шумы в обоих каналах тождественны как по амплитудам, так и по знаку выбросов относительно среднего значения, и, следовательно, вероятность одновременного превышения порога максимальна и равна $P\{r_1 \text{ и } r_2 > U_0\} = P_0$. При этом, согласно (10), $P_F = P_0$. С уменьшением величины ρ амплитуды шумовых выбросов начинают отличаться друг от друга, хотя выбросы одинакового знака превалируют над выбросами разных знаков. При этом если величина порога мала, то вероятность одновременного превышения его шумами сравнительно велика, так как если один из шумовых выбросов превысит порог, то велика вероятность, что и второй также превысит порог. С ростом же величины порога, вследствие того, что амплитуды одновременных выбросов отличаются друг от друга, превышение уровня в одном канале не обязательно повлечет за собой превышение в другом, даже при выбросах одного знака. Таким образом, с ростом порога вероятность совпадения, а следовательно и влияние корреляции, уменьшается.

Наконец, при $\rho = 0$ шумы независимы и вероятность совпадения наименьшая:

$$P\{r_1 \text{ и } r_2 > U_0\} = P_0^2$$

и, следовательно, $P_F = 2P_0 - P_0^2 \simeq 2P_0$.

3. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА

Пусть имеется n каналов с коррелированными шумами. Обозначим через ρ_{ik} коэффициент корреляции шумов на входе детекторов каналов i и k. Будем полагать, что во всех каналах дисперсия шумов одна и та же, а коэффициент корреляции убывает с ростом $|i-k|$. Для расчета вероятности ложной тревоги необходимо вычислить интеграл (1). Как указывалось, этот интеграл не берется, а численное его нахождение сопряжено с большими трудностями.

При этих обстоятельствах представляет интерес найти приближенное значение выражения (1). Обозначим через A_k событие, заключающееся в том, что амплитуда огибающей в канале k превысит порог U_0. Тогда вероятность ложной тревоги есть вероятность того, что произойдет хотя бы одно из событий A_k $(k=1, 2, \ldots, n)$

$$P_F = P\{A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } A_3 \ldots \text{или } A_k \ldots \text{или } A_n\}. \tag{24}$$

Согласно известному правилу теории вероятности [6], имеем

$$P_F = P\{A_1 \text{ или } A_2 \ldots \text{или } A_n\} = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots \pm S_n, \tag{25}$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_i \text{ и } A_k), \quad i<k;$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(A_i \text{ и } A_k \text{ и } A_j), \quad i<k<j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = P(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \ldots \text{ и } A_n).$$

В тех случаях, когда несмежные каналы коррелированы не очень сильно, вероятность тройного совпадения $P(A_i \text{ и } A_j \text{ и } A_k)$ имеет порядок $P_0^2 \ll P_0$ и ее величиной можно пренебречь. Пренебрегая также вероятностями совпадений более высокого порядка, получим

$$P_F \simeq nP_0 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_i \text{ и } A_k), \quad i<k, \tag{26}$$

где, согласно (18),

$$P(A_i \text{ и } A_k) = \frac{1+\rho_{ik}}{2\sqrt{\rho_{ik}}}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1-\rho_{ik}}{2(1+\rho_{ik})}}\,\beta\right)\right] e^{-\beta^2/2}, \tag{27}$$

а

$$P_0 = P(A_i) = e^{-\beta^2/2}, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Отметим, что в предельном случае при $\rho_{ik}=0$, $i, k=1, 2, \ldots, n$ получим, как и следовало ожидать,

$$P_F = nP_0. \tag{28}$$

Выражение (26) совместно с (27) при условиях (20) позволяет приближенно находить величину ложной тревоги, а следовательно, и характеристики обнаружения в многоканальной системе с коррелированными шумами при отборе амплитуд по наибольшему значению. Ошибка, которая при этом получается, будет тем меньше, чем меньше коэффициент корреляции несмежных каналов при любых коэффициентах корреляции соседних кана-

лов. Как было показано в предыдущем параграфе, при больших порогах с уменьшением коэффициента корреляции влияние коррелированности шумов на вероятность ложной тревоги быстро уменьшается; так, при $P_0 < 10^{-3}$ и $\rho_{ik} \leqslant 0{,}5$ шумы в каналах i и k можно считать независимыми. Таким образом, если величина ложной тревоги в каждом канале меньше 10^{-3}, а коэффициент корреляции несмежных каналов $\rho_{i,i+k,k\geqslant 2} \leqslant 0{,}5$, то ошибка будет пренебрежимо мала. Такой случай, когда соседние каналы сильно коррелированы, а несоседние — слабо, встречается наиболее часто. В качестве иллюстрации изложенного метода расчета рассмотрим численный пример.

Пусть $n = 100$, $P_0 = 10^{-5}$, $\rho_{i,i+k} = 0{,}9$ при $k = 1$, $\rho_{i,i+k} = 0{,}7$ при $k = 2$, $\rho_{i,i+k} \leqslant 0{,}5$ при $k \geqslant 3$.

Пользуясь (27), находим

$$P\{r_i \text{ и } r_{i+1} > U_0\} = 0{,}27 \cdot 10^{-5},$$

$$P\{r_i \text{ и } r_{i+2} > U_0\} = 0{,}04 \cdot 10^{-5},$$

$$P\{r_i \text{ и } r_{i+3} > U_0\} = 0{,}006 \cdot 10^{-5}.$$

Очевидно, что вероятностями $P\{r_i \text{ и } r_{i,i+k} > U_0\}$ при $k \geqslant 3$, а тем более вероятностями тройных и выше совпадений, можно пренебречь. Используя (26), получим

$$P_F = 10^{-5}(100 - 99 \cdot 0{,}27 - 98 \cdot 0{,}04) = 6{,}94 \cdot 10^{-4}.$$

Отметим, что если бы все каналы были независимы,

$$P_F = 100 \cdot 10^{-5} = 10^{-3}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведены соотношения (26) и (27), позволяющие находить вероятность ложной тревоги в многоканальных системах с коррелированными шумами при отборе амплитуд огибающих по наибольшему значению. Получено также асимптотическое выражение (19) для интегрального распределения амплитуд огибающих двумерного нормального процесса и показано, что влияние корреляции при рассмотренном способе обработки сигналов быстро уменьшается с увеличением уровня порога.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. W. Peterson, T. G. Birdsall, W. G. Fox, The theory of signal detectability, IRE Trans., 1954, PGIT-4, 9, 171.
2. W. Hoffman, The joint distribution of n successive outputs of linear detectors, J. Appl. Phys., 1954, 25, 8, 1006.
3. В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд. Советское радио, 1951.
4. H. Stras, Diversity reception with correlated signals, J. Appl. Phys., 1956, 27, 1, 93.
5. K. Miller, R. Bernstein, An analysis of coherent integration and its application to signal detection, IRE Trans, 1957, IT-3,4, 237.
6. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложение, ИЛ, 1952.

Поступила в редакцию
5 III 1959

1960 № 2

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННО́ГО ПОЛОЖЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ

Б. Н. Митяшев

Уточняются условия и способы реализации предельной точности и наибольшего граничного отношения помехи к сигналу при определении временно́го положения импульсных сигналов.

ВВЕДЕНИЕ

Имеется несколько способов определения временно́го положения импульсных сигналов, обеспечивающих теоретически достижимую точность в условиях малых помех [1—4]. В большинстве случаев [1—3] непременным условием получения предельной точности является использование фильтров, частотная характеристика которых является комплексно-сопряженной спектру сигнальных импульсов. В то же время при достаточно малом уровне помех предельную точность или близкую к ней можно реализовать и без применения таких фильтров [4]. Заманчивость использования упомянутых выше фильтров заключается в том, что они являются оптимальными и в задаче обнаружения слабых сигналов, поэтому при оптимальной фильтрации появляется возможность точного определения временно́го положения импульсов при повышенном уровне помех. Однако это получается не при всех способах отсчета, требующих оптимальной фильтрации для обеспечения предельной точности в случае малого отношения помехи к сигналу.

В данной работе выясняется, при каких способах определения временно́го положения импульсов предельная точность при малом уровне помех сочетается с наибольшей граничной помехоустойчивостью.

ВРЕМЕННОЕ ДИСКРИМИНИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСОВ

При автоматическом определении временно́го положения импульсов очень хорошие результаты получаются с использованием временны́х дискриминаторов, в которых сигнал ошибки вырабатывается путем интегрирования сигнала и помехи [2—4]. Для уточнения предельных возможностей этого способа рассмотрим временно́е дискриминирование прямоугольного сигнального импульса при оптимальной фильтрации. Будем считать, что шум на входе фильтра имеет равномерную спектральную плотность и что на выходе фильтра перед дискриминатором включен линейный безынерционный детектор.

Если радиоимпульс прямоугольной формы имеет несущую частоту f_0 и длительность T_c, то сопряженным спектру огибающей сигнала (оптимальным) является фильтр с частотной характеристикой

$$K(f) = \frac{\sin \pi (f - f_0) T_c}{\pi (f - f_0) T_c}. \qquad (1)$$

Сигнальный импульс, прошедший такой фильтр, имеет треугольную форму и длительность в основании $2T_c$. Пренебрегая искажением сигнала при детектировании, можем считать, что сигнальный импульс на

ыходе детектора также имеет треугольную форму (рис. 1, *а*). Амплиту-а импульса на выходе детектора отличается от амплитуды на его вхо-е U_{mc0} коэффициентом $K_{п=}(p)$, учитывающим подавление сигнала поме-ой в детекторе и зависящим от отношения помехи к сигналу $= \sqrt{2}\,\sigma_0/U_{mc0}$(здесь σ_0 — действующее значение шума на входе етектора). При $p \ll 1\, K_{п=}(p) \simeq 1$. Если > 1, то

$$K_{п=}(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{4p}. \qquad (2)$$

Пусть селектирующие импульсы во ременно́м дискриминаторе имеют равную лительность и следуют непосредственно дин за другим (рис. 1, *б*, *в*). Напряжение игнала на выходе дискриминатора u_{cd} авно разности площадей участков сиг-ального импульса, совпадающих во вре-ени с селектирующими импульсами. За-исимости этого напряжения от времен-но́го рассогласования Δt (характеристики искриминатора) изображены на рис. 1,*г*. Крутизна характеристик на начальном частке ($\Delta t = 0$) равна

$$S_{d0} = 2K_{п=}(p)\, U_{mc0}\, \frac{T}{T_c}, \qquad (3)$$

де T — длительность селектирующих мпульсов.

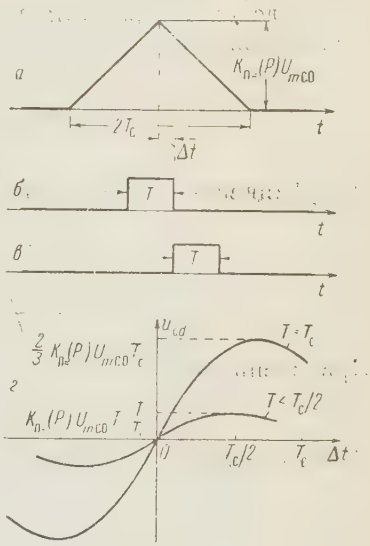


Рис. 1

Максимальное напряжение сигнала на выходе дискриминатора U_{mcd} ри $T < T_c/2$ равно

$$U_{mcd} = K_{п=}(p)\, U_{mc0}\, T\, \frac{T}{T_c}. \qquad (4)$$

сли $T = T_c$, то

$$U_{mcd} = \frac{2}{3} K_{п=}(p)\, U_{mc0}\, T_c. \qquad (5)$$

Для определения временно́й ошибки дискриминирования и границ-ого отношения помехи к сигналу [4] необходимо вычислить дисперсию омехи на выходе дискриминатора. При очень малом и очень большом тношениях помехи к сигналу можем считать, что подаваемый на вход искриминатора шум является стационарным. В этом случае дисперия помехи на выходе дискриминатора равна [5]

$$\sigma_d^2 = 4\sigma^2 T^2 (\gamma_T^2 - \gamma_{2T}^2). \qquad (6)$$

де σ^2 — дисперсия шума на входе дискриминатора; коэффициенты γ_T^2 и $_T$ являются коэффициентами усреднения шума за время T и $2T$ соот-етственно; коэффициент

$$\gamma_T^2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T - \tau)\, r(\tau)\, d\tau, \qquad (7)$$

е $r(\tau)$ — коэффициент корреляции входного шума.

В отсутствие сигнала коэффициент корреляции и дисперсия шума на выходе детектора приближенно равны

$$r(\tau) = \rho^2(\tau), \quad \sigma^2 = \frac{\pi}{8}\sigma_0^2, \tag{8}$$

где σ_0^2 и $\rho(\tau)$ — дисперсия и огибающая коэффициента корреляции шума на входе детектора. Для шума на выходе фильтра с частотной характеристикой (1)

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T_c} & (\tau < T_c), \\ 0 & (\tau > T_c). \end{cases} \tag{9}$$

Коэффициент γ_T^2 на основании (7), (8) и (9) оказывается равным

$$\gamma_T'^2 = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{T}{T_c} + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{T}{T_c}\right)^2 & (T < T_c), \\ \dfrac{2}{3}\dfrac{T_c}{T} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{T_c}{T}\right)^2 & (T > T_c). \end{cases} \tag{10}$$

При очень малом отношении помехи к сигналу ($p \ll 1$)

$$r(\tau) \simeq \rho(\tau), \qquad \sigma^2 \simeq \sigma_0^2. \tag{11}$$

В этом случае коэффициент γ_T^2 равен

$$\gamma_T''^2 = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{3}\dfrac{T}{T_c} & (T < T_c), \\ \dfrac{T_c}{T} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{T_c}{T}\right)^2 & (T > T_c). \end{cases} \tag{12}$$

Зависимости коэффициентов $\gamma_T'^2$ и $\gamma_T''^2$, а также разностей $2(\gamma_T'^2 - \gamma_{2T}'^2)$ и $2(\gamma_T''^2 - \gamma_{2T}''^2)$ от отношения T/T_c изображены на рис. 2. Заметим, что

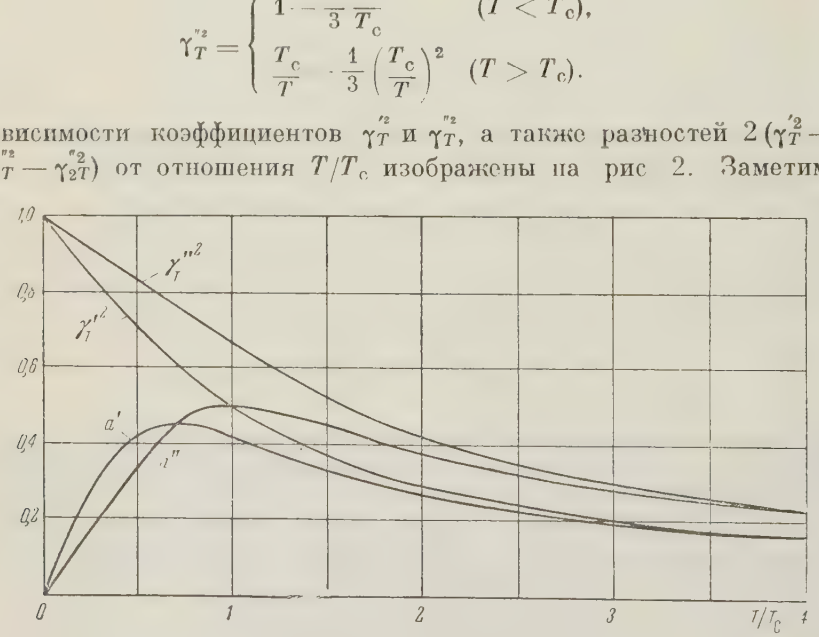


Рис. 2. Зависимость коэффициентов $\gamma_T'^2$, $\gamma_T''^2$, $a' = 2(\gamma_T'^2 - \gamma_{2T}'^2)$ и $a'' = 2(\gamma_T''^2 - \gamma_{2T}''^2)$ от отношения T/T_c.

эффективная ширина полосы фильтра (1) равна $\Delta f_0 = 1/T_c$, поэтому $T/T_c = \Delta f_0 T$.

Средняя квадратичная временна́я ошибка сопровождения, вызываемая помехой, равна [4]

$$\Delta\tau_c = \frac{\sigma_d}{S_{d0}}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{13}$$

Здесь σ_d определяется выражением (6), а крутизна характеристики ди-

криминатора S_{d0} — выражением (3); n — число сигнальных импульсов, о которому ведется усреднение результатов дискриминирования.

В случае малого отношения помехи к сигналу на входе детектора $p \ll 1$) на основании (6), (11) и (12) при $T \leqslant T_c/2$

$$\sigma_d^2 = \frac{4}{3}\sigma_0^2 T^2 \frac{T}{T_c}. \tag{14}$$

Подставляя (3) и (14) в (13) и считая, что $K_{п=}(p) = 1$, имеем

$$\Delta\tau_c = \frac{1}{\sqrt{6}} pT_c \sqrt{\frac{T}{T_c}} \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{15}$$

де

$$\rho = \frac{\sqrt{2}\sigma_0}{U_{mc0}}. \tag{16}$$

Так как эффективная полоса пропускания фильтра (1) равна $1/T_c$, о $\sigma_0^2 = N_0/T_c$ (N_0 — спектральная плотность шума на входе фильтра), оэтому

$$\Delta\tau_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{N_0 T}}{U_{mc0}} \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{17}$$

Здесь величина ошибки уменьшается с уменьшением длительности се-лектирующих импульсов T.

За допустимое, граничное, отношение помехи к сигналу принимаем акое, при котором величина помехи, усредненной в системе сопровож-дения, становится равной максимальному значению сигнала на выходе дискриминатора:

$$\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}} = U_{mcd}. \tag{18}$$

При малых T и n граничное отношение помехи к сигналу оказы-вается малым. Подставляя (4) и (14) в (18), считая $K_{п=}(p) = 1$ и учи-тывая (16), для граничного отношения помехи к сигналу на входе де-тектора получаем выражение

$$p_{гр} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{T}{T_c}} \sqrt{n}. \tag{19}$$

Формула (19) справедлива, когда вычисленное по ней значение $p_{гр}$ ока-зывается меньше единицы. Граничное значение спектральной плотности помехи на входе оптимального фильтра (1) в тех же условиях равно

$$N_{0\,гр} = 0{,}75\, U_{mc0}^2 Tn. \tag{20}$$

Выражения (17), (19) и (20) показывают, что сокращение длитель-ности селектирующих импульсов сопровождается увеличением точности и уменьшением граничного значения помехи.

Временно́е дискриминирование узкими смежными селектирующими импульсами при оптимальной фильтрации сигнала является именно той операцией, которая рекомендуется в качестве наилучшей (для малого уровня шума) в работах [2] и [3]. При этом способе свойства оптимальной фильтрации используются далеко не полностью. Если сигнальные импуль-сы имеют очень короткие фронты, то граничное отношение помехи к сигналу оказывается низким.

Аналогичные результаты получаются и без использования оптималь-ной фильтрации [4]. Для получения предельной точности достаточно

сигнальный импульс, имеющий длительность фронта T_Φ, пропустить через обычный фильтр с полосой $\Delta f_0 = 1/T_\Phi$ и взять длительность селектирующих импульсов в дискриминаторе равной T_Φ (временной интервал между селектирующими импульсами равен длительности сигнального импульса). Этот способ легко реализуется. Его граничная помехоустойчивость (величина $N_{0\,гр}$) немногим ниже, чем при коротких смежных селектирующих импульсах и оптимальной фильтрации сигнала.

Наибольшее граничное отношение помехи к сигналу получается при длительности селектирующих импульсов, равной длительности сигнального импульса ($T = T_c$). Подставляя (5) и (6) в (18), учитывая (2), (8), (10) и (16), получаем

$$p_{гр} = 0{,}85\sqrt[4]{n} \tag{21}$$

и

$$N_{0\,гр} = 0{,}37\,U^2_{mc0}\,T_c\sqrt{n}. \tag{22}$$

Формула (21) является точной для достаточно больших n, когда $p_{гр}$ оказывается больше единицы.

Величина ошибки при малом уровне помех в случае $T = T_c$ оказывается равной

$$\Delta\tau_c = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{N_0 T_c}}{U_{mc0}}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}35\,pT_c\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{23}$$

Эти результаты также реализуются без применения согласованного оптимального фильтра [4]. Достаточно полосу пропускания обычного полосового фильтра взять равной $\Delta f_0 = 1{,}3/T_c$.

Таким образом, в рассматриваемом дискриминаторе условия получения предельной точности в общем случае отличаются от условий получения наибольшей граничной помехоустойчивости. Оптимальная фильтрация сигнала здесь не помогает объединению этих условий. Предельная точность при наибольшей граничной помехоустойчивости получается для сигналов, у которых длительность фронта приблизительно равна длительности импульса ($T_\Phi \simeq T_c$). В этом случае резонансный усилитель, имеющий невысокую избирательность и эффективную полосу пропускания $\Delta f_0 \simeq 1/T_c \simeq 1/T_\Phi$, в достаточно полной мере реализует свойства оптимального фильтра.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ ПО ПОЛОЖЕНИЮ МАКСИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИГНАЛА

Определение временного положения импульсов по положению пиковых значений сигнала применяется довольно часто. Предельную точность этот способ обеспечивает при оптимальной фильтрации [1, 3]. Кроме того здесь можно реализовать и наибольшую граничную помехоустойчивость. Рассмотрим один такой способ реализации.

Для определения временного положения импульсов по положению максимальных значений сигнала предлагается следующий способ. Сигнал, прошедший оптимальный фильтр и детектор (рис. 3,*а*), ограничивается снизу на уровне u_0 и затем дифференцируется (рис. 3, *б*). Далее сигнал поступает на усилитель и двусторонний ограничитель. В результате получается импульс вида рис. 3, *в*. Если такой импульс подать на дифференцирующую цепочку (рис. 3, *г*) и затем выделить отрицательный импульс или запустить генератор, то на выходе получим импульс, передний фронт которого совпадает с положением максимума сигнального импульса (рис. 3, *д*). Устанавливая должным образом уровень ограничения u_0, при этом способе можно высокую точность при малом уровне помех сочетать с высокой граничной помехоустойчивостью.

Если необходимо вырабатывать сигнал ошибки, то удобна селектирующая функция вида рис. 3, *д*. Сигнал ошибки, пропорциональный рас-

согласованию Δt, может быть получен в результате перемножения и последующего интегрирования импульсов рис. 3, *е* и 3, *д*. Перемножение здесь легко выполняется при помощи селектирующего каскада.

Иногда желательно записать временнóе положение сигнала в виде напряжения. В этом случае можно использовать измерительный импульс вида рис. 3,*ж*. Площадь и амплитуда выделенного участка измерительного импульса пропорциональны временнóму интервалу Δt_1. Здесь получается своеобразное использование быстрой развертки индикатора.

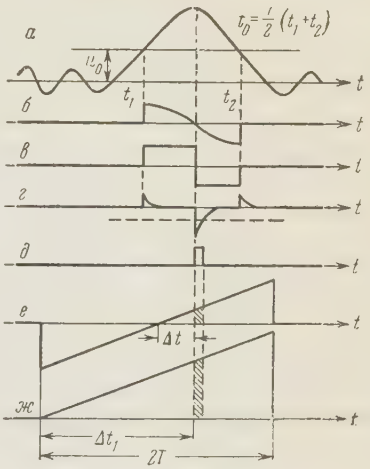


Рис. 3

Остановимся на оценке величин ошибки и граничного отношения помехи к сигналу.

В случае малого отношения помехи к сигналу основную ошибку вызывают искажения сигнала помехой. При оптимальной фильтрации эта ошибка получается наименьшей достижимой [1, 3], поэтому для трапецеидальных сигнальных импульсов, имеющих длительность фронта T_ϕ и амплитуду U_{mc0}, средняя квадратичная временнáя ошибка равна [4]

$$\Delta\tau_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{N_0 T_\phi}}{U_{mc0}} \frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (24)$$

Учитывая, что эффективная ширина полосы пропускания оптимального (согласованного) фильтра в зависимости от длительности фронта сигнала лежит в пределах $\Delta f_0 = (1 \div {}^2/_3)/T_c$ ($\Delta f_0 = 1/T_c$ при $T_\phi = 0$ и $\Delta f_0 = {}^2/_3\, T_c$ при $T_\phi = T_c$), а амплитуда импульсов на выходе фильтра соответственно в пределах $U_{mc} = (1 \div {}^2/_3) U_{mc0}$, формулу (24) можем написать в виде

$$\Delta\tau_c = \left(1 \div \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \frac{1}{2}\, p \sqrt{T_\phi T_c}\, \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (25)$$

где $p = \sqrt{2}\sqrt{N_0 \Delta f_0}/U_{mc0}$ — отношение помехи к сигналу на выходе согласованного фильтра. Отметим, что $p = \sqrt{N_0 E}$ [1] (E — энергия сигнала).

При большом уровне помех возникает неоднозначность отсчета, вызываемая появлением выбросов шума, превышающих уровень ограничения. Эта же причина ограничивает допустимый уровень помех. Граничное отношение помехи к сигналу является функцией длительности селектируемого участка $2T$ (см. рис. 3) и числа сигнальных импульсов n, используемых для отсчета.

При определении временнóго положения импульсов предполагается, что сигнал имеется в селектируемом участке, поэтому неоднозначность, вызываемая выбросами шума, возникает, если $T \geqslant T_c$. При $T = T_c$ граничное отношение помехи к сигналу получается наибольшим. Это наибольшее отношение помехи к сигналу можно установить лишь условно. Однако можно видеть, что в случае приема одиночного сигнального импульса при оптимальной фильтрации и при $T = T_c$ граничное отношение помехи к сигналу на входе детектора оказывается близким к единице. Если при $p = 1$ установить уровень ограничения u_0 так, что вероятность превышения уровня в том месте, где имеется сигнал, $P_c = 0{,}5$, то вероятность появления выброса шума $P_п = 0{,}2$ (данные следуют из распределения Рэлея—Райса для шума на выходе линейного амплитудного детектора [7]). При $p = 2$ вероятность $P_п$ увеличивается до 0,4, а при $P_c = 0{,}5$ — падает до 0,01.

Если имеем n сигнальных импульсов, то наибольшее граничное значение помехи можно обеспечить, предварительно суммируя реализации сигнала, возникающие на выходе детектора [1] (предполагается, что начальные фазы высокочастотного наполнения импульсов случайно и взаимно независимы). Оценим величину граничного отношения помехи к сигналу на входе детектора, которое получается в этом случае.

Пусть имеется n отрезков напряжения длиной $2T$, полученных в результате детектирования и временно́го селектирования сигнала и шума. Временно́е положение сигнала внутри каждого отрезка будем считать одинаковым. Если n достаточно велико, то после суммирования получим отрезок нестационарного нормального случайного процесса длиной $2T$. Учитывая, что сигнал и шум прошли через оптимальный фильтр, селектируемый отрезок можем разбить на $m = 2T/T_c$ независимых участков, в одном из которых содержится сигнальный импульс. Дисперсия шума в точках, где отсутствует сигнал, σ^2 связана с дисперсией шума на входе детектора σ_0^2 соотношением

$$\sigma^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) n\sigma_0^2 \simeq 0{,}43\, n\sigma_0^2. \tag{26}$$

При сделанных допущениях вероятность превышения уровня ограничения выбросами шума равна

$$P_п = 1 - [F(x_0)]^{m-1}, \tag{27}$$

где

$$F(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

— функция Лапласа; $x_0 = u_0/\sigma$ — уровень ограничения, отнесенный к σ.

На участке, где имеется сигнал, статистическое среднее значение напряжения отличается от статистического среднего значения напряжения в отсутствие сигнала. Максимальное отличие средних значений, отнесенное к σ, равно $\bar{\Delta}x_c = K_{п=}(p)\, U_{mc0}\, n/\sigma$ (здесь коэффициент $K_{п=}(p)$ зависит от отношения помехи к сигналу на входе детектора и при $p \gg 1$ определяется выражением (2)). Учитывая (2), (12) и (26), получаем

$$\bar{\Delta}x_c = \sqrt{\frac{\pi}{4(4-\pi)}}\, \sqrt{n}\, \frac{1}{p^2}. \tag{28}$$

Таблица

$m = \frac{2T}{T_c}$	$P_п = 0{,}2$; $P_c = 0{,}5$		$P_п = 0{,}1$ $P_c = 0{,}5$	
	x_0	c	x_0	c
2	0,85	1,06	1,28	0,87
4	1,46	0,81	1,82	0,73
6	1,71	0,75	2,04	0,68
10	1,97	0,70	2,27	0,65
20	2,30	0,65	2,57	0,61
30	2,45	0,63	2,70	0,60
60	2,68	0,60	2,92	0,57

Вероятность превышения уровня ограничения сигналом P_c равняется 0,5, если уровень ограничения $x_0 = \bar{\Delta}x_c$. Минимальная величина x_0 определяется заданной вероятностью $P_п$ (см. выражение (27)). Считая вероятность $P_c = 0{,}5$ допустимой на основании (28), находим граничное отношение помехи к сигналу на входе детектора:

$$p_{гр} = c\sqrt[4]{n}, \tag{29}$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \sqrt{\frac{\pi}{4(4-\pi)}} \simeq \frac{1}{\sqrt{x_0}}. \tag{30}$$

В таблице приведены значения коэффициента c, вычисленные по формулам (27) и (30) для случаев $P_п = 0{,}2$ и $P_п = 0{,}1$.

Из таблицы видно, что $p_{гр}$ довольно медленно уменьшается с увеличением длительности селектирующих импульсов (с увеличением m). Как и следовало ожидать, при $T = T_c$ $p_{гр}$ получается наибольшим. Если используется временной дискриминатор и усреднение в системе сопровождения, то наибольшее значение $p_{гр}$ обеспечивается и без предварительного суммирования сигналов.

При автоматическом сопровождении влияние выбросов шума при $T > T_c$ удается ослабить, используя для вырабатывания сигнала ошибки умножение сигнала на измерительный импульс вида рис. 3, *е* и последующее интегрирование. В этом случае при оптимальной фильтрации сигнала с достаточной для практики точностью можем считать, что

$$p_{гр} = 0{,}7\sqrt{2-\frac{T_c}{T}}\sqrt[4]{\frac{T_c}{T}}\sqrt[4]{n}. \qquad (31)$$

Формула (31) получена из условия, эквивалентного условию (18), для дискриминирования измерительным импульсом вида рис. 3, *е* без включения [7] и с включением [8] ограничительного каскада после детектора. Формула (31) справедлива, если вычисленное по ней значение $p_{гр}$ оказывается не меньше единицы. Здесь при больших $Tp_{гр}$ быстрее уменьшается с увеличением T, чем в случае предварительного суммирования сигналов (см. выражение (29) и данные таблицы).

Следует подчеркнуть, что при определении положения импульса по положению максимума (рис. 3) ошибка при малом уровне помех определяется выражением (24), а граничное отношение помехи к сигналу — выражением (29), если фильтр перед детектором является точной реализацией согласованного оптимального фильтра. При фильтрации сигналов, имеющих $T_ф < T_c$, обычным полосовым фильтром с полосой $\Delta f_0 \simeq 1/T_c$ реализуется лишь наибольшая граничная помехоустойчивость.

Имеется еще один способ реализации предельной точности. Это отсчет по точке, лежащей на середине отрезка между точками пересечения уровня ограничения с фронтами сигнального импульса (рис. 3, точка t_0). Если полосу пропускания фильтра перед детектором взять равной $\Delta f_0 = 1/T_ф$, то ошибка будет лишь на несколько процентов больше предельной [4]. Однако наибольшая граничная помехоустойчивость здесь реализуется лишь для сигналов, у которых $T_ф \simeq T_c$. Отметим, что для таких сигналов все рассмотренные здесь способы дают приблизительно одинаковый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Вудворд, Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, Изд. Советское радио, 1955.
2. A. J. Mallinckrodt, T. E. Sollenberger, Optimum pulse-time determination, IRE Trans., PGIT, 1954, 3 (русск. перев. см. Вестн. информации, 1954, № 17).
3. С. Е. Фалькович, О точности отсчета координаты дальности в радиолокационных системах, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 4, 450.
4. Б. Н. Митяшев, О помехоустойчивости временно́го дискриминирования импульсных сигналов, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 4, 637.
5. Б. Н. Митяшев, Прохождение флуктуационной помехи и импульсного сигнала через временно́й дискриминатор, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 9, 1144.
6. С. О. Райс, Теория флуктуационных шумов, Сб. переводов, Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, 1953.
7. Б. Н. Митяшев, О помехоустойчивости одного способа временно́го дискриминирования импульсных сигналов, НДВШ (Радиотехника и электроника), 1958, 1, 2, 7.
8. Б. Н. Митяшев, О помехоустойчивости одного способа определения временно́го положения импульсов, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 11, 1765.

Поступила в редакцию
4 III 1959

1960 № 2

ФАЗО-ЧАСТОТНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ В СМЕСИТЕЛЯХ

М. Е. Герценштейн

Исследуется неравномерность амплитудно-фазовой характеристики смесителя, вызванная паразитным каналом — преобразованием частоты по зеркальному каналу. Показано, что при небольших размерах смесителя и сравнительно узких полосах перекрестные искажения обусловлены только входными цепями промежуточной частоты.

В последнее время появилось несколько работ [1—3], посвященных амплитудным и фазовым искажениям в кристаллических смесителях диапазона сверхвысоких частот. В этих работах смеситель рассматривался как шестиполюсник, который описывается соответствующей матрицей проводимости, что приводит к громоздким формулам и малопаглядным окончательным результатам.

Если неравномерность частотной характеристики смесителя сравнительно мала (точное значение этого критерия будет дано ниже), то при исследовании частотной характеристики любого линейного или квазилинейного СВЧ-устройства можно применить приближенный метод, развитый в [4]. Этот метод основан на рассмотрении решения первого приближения точных матричных уравнений шестиполюсника [3]. При этом мы будем исходить не из токов и напряжений, а из волновой картины.

При волновой трактовке искажения частотной характеристики любой системы могут быть объяснены тем, что полное поле на выходе системы есть результат интерференции нескольких волн, пришедших различными путями. Если в идеальном СВЧ-устройстве существует только один путь, то в реальном устройстве могут появиться паразитные пути, вызванные различными причинами, например: а) рассогласованием в волноводном тракте [4]; б) двойным преобразованием по зеркальной частоте или на гармониках; в) «пролезанием» сигнала от генератора к приемнику из-за недостаточной экранировки системы.

Во всех этих случаях исследование частотной характеристики системы сводится к исследованию векторной диаграммы (см. рисунок).

Полное поле на выходе системы есть векторная сумма:

$$\vec{U}_{\text{полн}} = \vec{U}_0 + \vec{U}_1 = U_0 \left(1 + \frac{U_1}{U_0}\right), \tag{1}$$

где U_0 — комплексная амплитуда сигнала, прошедшего основным путем; U_1 — комплексная амплитуда сигнала, прошедшего паразитным путем.

Будем считать, что

$$\gamma = |(U_1/U_0)| \ll 1 \tag{2}$$

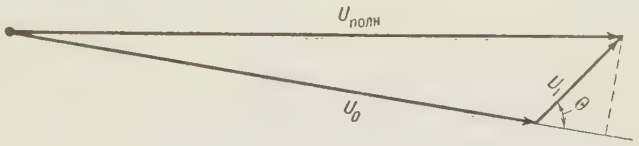
и пренебрежем γ^2.

При формировании частотных зависимостей основную роль играют фазовые соотношения; частотной зависимостью γ можно пренебречь, пока речь идет о сравнительно узких диапазонах частот. Тогда для поправок к амплитудной и фазовой характеристикам относительно идеального

устройства, в котором паразитный канал отсутствует, получим

$$\left.\begin{aligned} \Delta A\,(дб) &= 8{,}69\gamma\cos\theta, \\ \Delta\varphi &= \gamma\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

К каждом конкретном случае амплитудный множитель γ может быть легко подсчитан. Так, например, в рассогласованном тракте γ есть произведение коэффициентов отражения генератора и нагрузки [4], для



смесителя γ пропорционален произведению коэффициентов преобразования) μ (для прямого и обратного преобразований) и коэффициента отражения $\Gamma_з$ зеркальной частоты [3]:

$$\gamma = \mu_1\mu_2\Gamma_з \simeq 0{,}25\Gamma_з. \tag{4}$$

В формуле (4) мы приняли, что потери преобразования составляют 6 $дб$ ($\mu^2 = 0{,}25$).

Угол θ равен набегу фазы сигнала в паразитном канале:

$$\theta \simeq \beta l + \theta_н, \tag{5}$$

где β — волновое число; l — длина паразитного канала; $\theta_н$ — набег фазы в «низкочастотных» цепях — цепях промежуточной частоты.

Появление $\theta_н$ в формуле (5) вызвано тем, что фаза зеркальной частоты зависит от фазы тока промежуточной частоты, которая, в свою очередь, зависит от реактивности входной цепи УПЧ приемника. Зависимость $\theta_н$ от частоты в работах [1 — 3] не рассматривалась.

Перейдем теперь к групповому времени запаздывания сигнала. Используя формулу (3), получим

$$\Delta\tau = d\Delta\varphi/d\omega = \gamma\cos\theta d\theta/d\omega. \tag{6}$$

Поправка к групповому времени запаздывания сигнала пропорциональна $\cos\theta$, как и амплитудно-частотная характеристика, поэтому из постоянства амплитудно-частотной характеристики при малой частотной зависимости γ и $d\theta/d\omega$ следует постоянство группового времени запаздывания сигнала.

Для радиорелейных линий существенна неравномерность группового времени запаздывания сигнала в полосе одного высокочастотного ствола.

Для искажений, вносимых рассогласованным длинным трактом при изменении частоты, θ меняется больше, чем на π, следовательно, вектор U_1 делает больше полоборота, поэтому для среднеквадратичной неравномерности в полосе, полагая $\overline{\sin^2\theta} = \overline{\cos^2\theta} = {}^1/_2$, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\overline{\Delta A^2}} = 4{,}35\,\gamma, \\ &\sqrt{\overline{\Delta\varphi^2}} = \frac{1}{2}\gamma; \quad \beta l\,\frac{\Delta\omega}{\omega} \gg 1, \\ &\sqrt{\overline{\Delta\tau^2}} = \frac{1}{2}\gamma l\left|\frac{d\beta}{d\omega}\right|. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Однако при небольших размерах смесителей угол поворота вектора

U_1 сравнительно мал, и поэтому при исследовании неравномерности группового времени запаздывания сигнала достаточно воспользоваться первым членом разложения формулы (6) в ряд:

$$\delta\tau = \frac{d^2\Delta\varphi}{d\omega^2}\Delta\omega \simeq \left\{-\gamma\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)^2 \sin\theta + \gamma\frac{d^2\theta}{d\omega^2}\cos\theta\right\}\Delta\omega.$$

Используя формулу (5), получим

$$\delta\tau = -\gamma\sin\theta\left[l^2\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^2 + 2l\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)\left(\frac{d\theta_н}{d\omega}\right) + \left(\frac{d\theta_н}{d\omega}\right)^2\right]\Delta\omega + \gamma\cos\theta\left(l\frac{d^2\beta}{d\omega^2} + \frac{d^2\theta_н}{d\omega^2}\right)\Delta\omega. \quad (8)$$

Искажения удобно разделить на высокочастотные и низкочастотные, Высокочастотными мы называем искажения, возникающие из-за запаздывания сигнала в высокочастотных элементах паразитного канала. В формуле (8) эти искажения описываются членом, содержащим βl. Низкочастотными мы называем искажения за счет сдвига фаз паразитного канала в цепях промежуточной частоты. В формуле (8) эти искажения описываются членом, содержащим $\theta_н$.

Рассмотрим сначала высокочастотные искажения. Выполняя дифференцирование в формуле (8), получим

$$\delta\tau_{СВЧ} = -\gamma\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)\left(\frac{l}{c}\right)\left[\left(\frac{l}{c}\right)\Delta\omega\sin\theta + \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2\frac{\Delta\omega}{\omega}\cos\theta\right]. \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что для уменьшения $\delta\tau_{СВЧ}$ существуют следующие пути.

а) Размеры системы и настройка входных контуров УПЧ. Они должны быть подобраны так, чтобы $\mathrm{tg}\theta = -\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2\left(\frac{c}{\omega l}\right)$. Этот путь рекомендуют авторы работы [1]. Очевидно, что это условие легко выполнить для какой-нибудь одной фиксированной волны, но оно трудно выполнимо в широком диапазоне.

б) Уменьшение амплитудного множителя γ. Его можно уменьшить например, при помощи ферритового вентиля, вставленного между преселектором и смесителем. Если КБВ вентиля больше 0,9, то γ уменьшается в 20 раз. Этот путь неприемлем для смесителей, в которых подача энергии гетеродина осуществляется через фильтры, и мало что дает при паразитных каналах, связанных с более высокими гармониками.

в) Уменьшение длины паразитного канала l. Так как $\delta\tau_{СВЧ}$ пропорционально l^2, то этот способ наиболее удобен и дает наилучшие результаты.

Формулу (9) можно записать следующим образом:

$$\delta\tau_{СВЧ} = -\gamma\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2\left(\frac{l}{c}\right)\left[\left(\frac{2\pi l}{\lambda_0}\right)\sin\theta + \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2\cos\theta\right]\frac{\Delta\omega}{\omega}; \quad (10)$$

из этой формулы непосредственно видно, что время $\delta\tau_{СВЧ}$ ничтожно мало при размерах смесителя в несколько сантиметров.

В самом деле, пусть $l = 3$ см, $l/c = 0{,}1$ *нсек*, $\Delta\omega/\omega \simeq 1\%$, все остальные множители — порядка единицы. Тогда $\delta\tau_{СВЧ} = 10^{-3}$ *нсек*. Если l имеет величину более 1 *м*, то $\Delta\tau_{СВЧ}$ будет велико [1].

Займемся теперь искажениями, вызванными цепями промежуточной частоты. В формуле (8) рассмотрим только член с $\theta_н$:

$$\delta\tau_н = -\gamma\left[\sin\theta\left(\frac{d\theta_н}{d\omega}\right)^2 + \cos\theta\frac{d^2\theta_н}{d\omega^2}\right]\Delta\omega. \quad (11)$$

Пусть в цепи промежуточной частоты стоит контур с добротностью

Q, настроенный на середину полосы УПЧ. В этом случае

$$\frac{d^2\theta_н}{d\omega^2} \simeq 0, \quad \frac{d\theta_н}{d\omega} = 2Q\frac{1}{\omega_{пром}}, \tag{12}$$

и для неравномерности группового времени запаздывания имеем

$$\delta\tau_н = \gamma \sin\theta \left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_{пром}}\right)^2 \frac{1}{\Delta\omega}. \tag{13}$$

Оценим эту величину. Пусть на краю полосы $2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_{пром}} \simeq 0{,}5$, $\Delta f \simeq$ $\simeq 10\,Мгц$, тогда в наиболее неблагоприятном случае (когда $\sin\theta = 1$, $\gamma = 0{,}25$) $\delta\tau_н \cong н\,сек$. Таким образом, искажения за счет фазовых сдвигов в цепях промежуточной частоты могут быть значительно больше, чем за счет набегов фазы по высокой частоте. Для уменьшения низкочастотных искажений необходимо весьма тщательное выполнение входных цепей УПЧ, должны быть минимальные паразитные емкости*, применение кабеля недопустимо. Один из возможных путей уменьшения фазовых искажений — применение балансной схемы [2]. Однако из-за неидентичности кристаллов не удается получить хороших результатов [2].

Для смесителей, работающих после ЛБВ, для мощных смесителей, шумы в которых не играют роли, целесообразно в цепях промежуточной частоты применение активных сопротивлений, рассеивающих энергию. Для простейшей RC-цепи имеем

$$\theta_н = \omega T, \qquad T = RC, \tag{14}$$

где T — постоянная времени такой цепи. Так, например, если $R = 100\,ом$, $C = 10\,пф$, то $T = 1\,нсек$.

Подставляя (14) в (11), получим

$$\delta\tau_н = -\gamma(\Delta\omega T)\,T\,\sin\theta, \tag{15}$$

при $\Delta f \cong 10\,Мгц$ $\delta\tau_н$ не превышает 0,015 *нсек*.

Выводы. Наличие обратного преобразования зеркальной частоты приводит к неравномерности (порядка 1 *нсек*) фазо-частотных характеристик, которая является существенной для современных высококачественных радиорелейных линий.При этом основным источником искажений являются фазовые сдвиги в цепях промежуточной частоты.Наиболее эффективными мерами, позволяющими резко (на порядок и более) уменьшить перекрестные искажения, являются следующие: 1) установка ферритового вентиля между смесителем и преселектором (для входных смесителей); 2) выполнение цепей мощных смесителей из активных сопротивлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кавабаяси, Утида, Фазовые искажения в кристаллических преобразователях частоты, Дэнки цусин гаккай дзасси, 1956, 39, 7.
2. В. А. Петров, Ю. Д. Иванов, О частотных и фазовых искажениях в кристаллических преобразователях сверхвысоких частот, Тр. НИИ, 1958, 3 (93).
3. В. А. Петров, К вопросу диодного преобразования частоты, Вестн. НИИ МПСС, 1952, 4 (27).
4. М. Е. Герценштейн, Л. Б. Брянский, Погрешность аттенюатора из-за рассогласования в тракте СВЧ, Измерительная техника, 1956, 1.

Поступила в редакцию
16 II 1959

* Наличие паразитных емкостей и индуктивностей может привести к образованию паразитных резонансов вне полосы УПЧ, которые могут исказить фазовую характеристику.

1960 № 2

ВОЗДЕЙСТВИЕ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА НА ДВУХПЕТЛЕВУЮ СИСТЕМУ АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ УСИЛЕНИЯ

В. В. Широков

Находятся выражения для спектра огибающей сигнала на выходе усилителя с двухпетлевой системой АРУ при любом виде огибающей на входе. Решение проводится методом последовательных приближений. Подробно рассмотрен случай синусоидальной модуляции.

ВВЕДЕНИЕ

За последнее время значительно повысились требования к приемным устройствам в отношении поддержания неизменным среднего уровня выходного сигнала при изменении мощности входного сигнала в большом диапазоне, неискаженной передачи огибающей сигнала в одних каналах и возможности его демодуляции в других. Для выполнения этих требований во многих случаях оказывается необходимым применение двухпетлевой системы автоматической регулировки усиления (АРУ), схема которой показана на рис. 1.

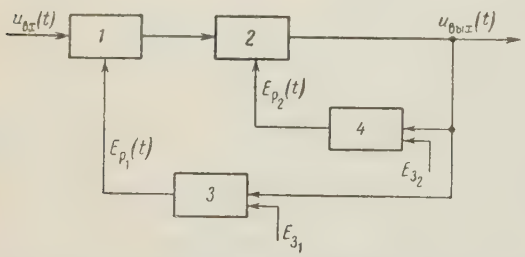


Рис. 1. Двухпетлевая система АРУ: *1, 2* — регулируемые усилители; *3, 4* — цепи обратной связи

В настоящей работе выводится интегральное уравнение, описывающее процессы в системе АРУ в установившемся режиме. Это уравнение позволяет получить решение для спектра огибающей сигнала на выходе приемного устройства с двухпетлевой АРУ методом последовательных приближений. Подробно анализируется прохождение сигнала с синусоидальной огибающей через приемное устройство с АРУ рассматриваемого вида. Полученные выражения дают возможность выбрать параметры АРУ, исходя из минимальных искажений синусоидальной огибающей сигнала, так как она содержит в себе принимаемую информацию, или, исходя из необходимости наилучшей демодуляции сигнала в тех каналах приемного устройства, в которых не используется амплитудная модуляция.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ ПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА С ДВУХПЕТЛЕВОЙ СИСТЕМОЙ АРУ

Ввиду большой инерционности АРУ можно пренебречь инерционностью регулируемого усилителя и за входное возмущение принять амплитуду входного сигнала, даже в том случае, когда он имеет импульсный характер. Цепи обратной связи будем предполагать линейными для огибающей сигнала. Это значит, что детектор в цепи обратной связи АРУ или безынерционен, или эквивалентен инерционной линейной цепи для огибающей. Эти предположения достаточно хорошо выполняются [1].

Интересуясь установившимся режимом работы, аппроксимируем регулировочные характеристики усилителей в рабочих точках прямыми линиями. Тогда сигнал на выходе $U_{вых}(t)$ будет связан со входным сигналом $U_{вх}(t)$ и напряжениями регулирования $E_{р1}(t)$ и $E_{р2}(t)$ соотношением

$$U_{вых}(t) = U_{вх}(t)\,[k_1 - b_1 E_{р1}(t)]\,[k_2 - b_2 E_{р2}(t)], \tag{1}$$

где k_1 и b_1, k_2 и b_2 — параметры аппроксимированных регулировочных характеристик первого и второго усилителей.

Представим второй сигнал в виде интеграла Фурье:

$$U_{вх}(t) = A + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega. \tag{2}$$

Здесь A и $a(\omega)$ — среднее значение и спектр переменной составляющей входного возмущения.

Напряжение на выходе удобно записать в виде

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega. \tag{3}$$

Тогда для напряжений регулирования получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} E_{р1}(t) &= \frac{k_{01}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, H_1(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega - k_{01}E_{з1}, \\ E_{р2}(t) &= \frac{k_{02}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, H_2(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega - k_{02}E_{з2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь $k_{01}H_1(\omega)$ и $k_{02}H_2(\omega)$ — коэффициенты передачи цепи обратной связи АРУ [$H_1(0) = H_2(0) = 1$]; $E_{з1}$ и $E_{з2}$ — напряжения задержки.

Подставляя (2) и (4) в (1), получим следующее интегральное уравнение для спектра напряжения на выходе:

$$C(\omega) = F(\omega)\,\{[2\pi A\delta(\omega) + a(\omega)]\,(k_1 + b_1 k_{01}E_{з1})\,(k_2 + b_2 k_{02}E_{з2}) -$$

$$-(k_2 b_1 + b_1 b_2 k_{02}E_{з2})\,\frac{k_{01}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(s)\, H_1(s)\, a(\omega - s)\, ds - (k_1 b_2 + b_1 b_2 k_{01}E_{з1}) \times$$

$$\times \frac{k_{02}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(s)\, H_2(s)\, a(\omega - s)\, ds + \frac{A b_1 b_2 k_{01} k_{02}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \times$$

$$\times\, C(s)\, C(\omega - s)\, H_1(s)\, H_2(\omega - s)\, ds + \frac{b_1 b_2 k_{01} k_{02}}{(2\pi)^2} \times$$

$$+ \iint_{-\infty}^{\infty} C(x)\, C(s - x)\, H_1(x)\, H_2(s - x)\, a(\omega - s)\, dx ds\}, \tag{5}$$

где

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + (A b_1 k_2 k_{01} + A b_1 b_2 k_{01} k_{02} E_{з2})\, H_1(\omega) + (A b_2 k_1 k_{02} + A b_1 b_2 k_{01} k_{02} E_{з1})\, H_2(\omega)};$$

$\delta(\omega)$ — дельта-функция.

Будем искать решение этого нелинейного интегрального уравнения в виде последовательных приближений:

$$C(\omega) = C_0(\omega) + C_1(\omega) + C_2(\omega) + \ldots,$$

полагая малой глубину модуляции входного сигнала ($m < 1$). Тогда для нулевого приближения $C_0(\omega)$ получим следующее уравнение

$$C_0(\omega) = F(\omega)\,[2\pi A\delta(\omega)\,(k_1 + b_1k_{01}E_{31})\,(k_2 + b_2k_{02}E_{32}) + \\ + k_{01}k_{02}\,b_1b_2A\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_0(s)\,C_0(\omega - s)\,H_1(s)\,H_2(\omega - s)\,ds], \qquad (6)$$

Так как $m < 1$, то из физических соображений ясно, что в нулевом приближении сигнал на выходе будет иметь постоянную величину, поэтому естественно искать решение уравнения (6) в виде

$$C_0(\omega) = 2\pi D\delta(\omega). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$C_0(\omega) = k_{\text{ср}}2\pi A\delta(\omega), \qquad (8)$$

где $k_{\text{ср}} = D/A$ — средний коэффициент усиления приемного устройства; D определяется из решения уравнения

$$b_1b_2k_{01}k_{02}AD^2 - (1 + Ab_1k_2k_{01} + Ab_2k_1k_{02} + Ab_1b_2E_{31}k_{01}k_{02} + \\ + Ab_1b_2E_{32}k_{01}k_{02})\,D + A\,(k_1k_2 + b_1k_2k_{01}E_{31} + b_2k_1E_{32}k_{02} + \\ + b_1b_2E_{31}E_{32}k_{01}k_{02}) = 0.$$

Величина $k_{\text{ср}}$ совпадает с коэффициентом усиления приемного устройства, когда на его вход воздействует сигнал постоянной амплитуды, равной A.

Используя (8) и (5), получим следующее выражение для первой поправки к нулевому приближению:

$$C_1(\omega) = H_{\text{э}}(\omega)\,a(\omega), \qquad (9)$$

где

$$H_{\text{э}}(\omega) = \frac{k_{\text{ср}}}{1 + N_1H_1(\omega) + N_2H_2(\omega)}; \qquad (10)$$

$$N_1 = Ab_1k_{01}[k_2 - b_2k_{02}(k_{\text{ср}}A - E_{32})];$$

$$N_2 = Ab_2k_{02}[k_1 - b_1k_{01}(k_{\text{ср}}A - E_{31})].$$

Значит с точки зрения передачи огибающей сигнала, модулированного по любому закону, приемное устройство с двухпетлевой системой АРУ эквивалентно в первом приближении линейной системе с коэффициентом передачи, определяемым формулой (10).

Используя выражения для $C_0(\omega)$ и $C_1(\omega)$, получим $C_2(\omega)$ в виде

$$C_2(\omega) = -\frac{N_1F(\omega)}{2\pi Ak_{01}}\int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{p1}}(s)\,a(s)\,a(\omega - s)\,ds - \\ - \frac{N_2F(\omega)}{2\pi Ak_{02}}\int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{p2}}(s)\,a(s)\,a(\omega - s)\,ds + \\ + \frac{F(\omega)\,Ab_1b_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{p1}}(s)\,H_{\text{p2}}(\omega - s)\,a(s)\,a(\omega - s)\,ds, \qquad (11)$$

где $H_{\text{p1}}(s) = k_{01}H_1(s)\,H_{\text{э}}(s)$ и $H_{\text{p2}}(s) = k_{02}H_2(s)\,H_{\text{э}}(s)$ — коэффициенты

передачи эквивалентных линейных систем для напряжений регулирования.

Аналогичным образом можно получить приближения и более высокого порядка, однако в большинстве случаев можно ограничиться первыми двумя поправками.

Таким образом, получено решение интегрального уравнения, описывающего двухпетлевую систему АРУ с фильтрами любого порядка. Используя это решение, можно определить спектр огибающей сигнала на выходе при любом виде огибающей на входе.

Используем полученное решение для анализа весьма актуального на практике случая синусоидальной модуляции сигнала.

Пусть сигнал на входе имеет вид

$$U_{\text{вх}}(t) = A(1 + m\cos\omega_0 t). \tag{12}$$

Тогда спектр переменной составляющей входного сигнала запишется в виде

$$a(\omega) = Am\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]. \tag{13}$$

Очевидно, что

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = U_{\text{вых}_0}(t) + U_{\text{вых}_1}(t) + U_{\text{вых}_2}(t) + \ldots, \tag{14}$$

где

$$U_{\text{вых}_0}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_0(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = k_{\text{ср}} A. \tag{15}$$

В соответствии с формулами (9), (13) и (14) получаем

$$U_{\text{вых}_1}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_1(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = Am\,\text{Re}\,[H_{\text{э}}(\omega_0)\, e^{j\omega_0 t}]$$

или

$$U_{\text{вых}_1}(t) = Am\sqrt{\{\text{Re}\,[H_{\text{э}}(\omega_0)]\}^2 + \{\text{Im}\,[H_{\text{э}}(\omega_0)]\}^2}\cos(\omega_0 t + \varphi_1), \tag{16}$$

где

$$\varphi_1 = \text{arc tg}\left[-\frac{\text{Im}\,[H_{\text{э}}(\omega_0)]}{\text{Re}\,[H_{\text{э}}(\omega_0)]}\right].$$

Полученные формулы дают возможность в первом приближении рассчитать искажения глубины модуляции и фазы огибающей сигнала на выходе приемного устройства с двухпетлевой системой АРУ любого порядка.

Аналогичным образом вторая поправка $U_{\text{вых}_2}(t)$ запишется в виде

$$U_{\text{вых}_2}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_2(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = U_{\text{2пост}} + U_{\text{2пер}}, \tag{17}$$

где

$$U_{\text{2пост}} = \frac{Am^2 N_1}{2k_{\text{o1}}} F(0)\,\text{Re}\,[H_{\text{p1}}(\omega_0)] + \frac{Am^2 N_2 F(0)}{2k_{\text{o2}}}\,\text{Re}\,[H_{\text{p2}}(\omega_0)] +$$

$$+ \frac{A^3 b_1 b_2 m^2}{2} F(0)\,\text{Re}\,[H_{\text{p1}}(\omega_0)\, H^*_{\text{p2}}(\omega_0)]$$

— поправка к постоянной составляющей сигнала;

$$U_{2\text{пер}} = \frac{Am^2N_1}{2k_{01}} \operatorname{Re}\left[H_{\text{р1}}(\omega_0) F(2\omega_0) e^{2j\omega_0 t}\right] + \\ + \frac{Am^2N_2}{2k_{02}} \operatorname{Re}\left[H_{\text{р2}}(\omega_0) F(2\omega_0) e^{2j\omega_0 t}\right] + \\ + \frac{b_1b_2A^3m^2}{2} \operatorname{Re}\left[H_{\text{р1}}(\omega_0) H_{\text{р2}}(\omega_0) F(2\omega_0) e^{2j\omega_0 t}\right]$$

— поправка к переменной составляющей сигнала.

Из полученных выражений следует, что во втором приближении для сигнала на выходе имеются поправка к постоянной составляющей и вторая гармоника регулярной огибающей сигнала. Физически появление высших гармоник в спектре огибающей сигнала на выходе объясняется тем, что в системе АРУ имеет место перемножение составляющих напряжения регулирования и входного сигнала. За счет этого система АРУ вносит нелинейные искажения в регулярную огибающую сигнала.

Итак, получено решение для случая воздействия на двухпетлевую систему АРУ любого порядка сигнала с синусоидальной огибающей. Формулы (15), (16) и (17) позволяют с достаточной точностью определить постоянную и переменные составляющие сигнала на выходе приемного устройства.

2. ИСКАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ СИГНАЛА ДВУХПЕТЛЕВОЙ СИСТЕМОЙ АРУ С ФИЛЬТРАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ЦЕПЯХ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В виде примера использования полученных выражений рассмотрим весьма распространенный на практике случай, когда в цепях обратной связи стоят простые *RC*-фильтры. Тогда

$$H_1(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1}; \quad H_2(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_2}. \tag{18}$$

Постоянная составляющая сигнала на выходе будет с достаточной степенью точности определяться формулой (15):

$$U_{\text{вых пост}} = k_{\text{ср}} A_{\text{в}}. \tag{19}$$

Проведенный анализ показывает, что поправка к этому приближению для постоянной составляющей, рассчитанная по формуле (17) с учетом (18), не превышает величины $k_{\text{ср}} Am^2F(0)$. Так как $F(0) \ll 1$, то эта поправка оказывается пренебрежимо малой.

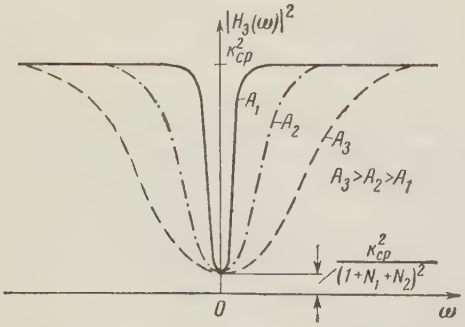


Рис. 2. Эквивалентные частотные характеристики АРУ

Коэффициент передачи линейной системы, эквивалентной в первом приближении двухпетлевой системе АРУ, получим, подставив (18) в (10):

$$H_{\text{э}}(\omega) = k_{\text{ср}} \frac{(1 - \omega^2 T_1 T_2) + j\omega(T_1 + T_2)}{(1 + N_1 + N_2 - \omega^2 T_1 T_2) + j\omega[T_1(1 + N_2) + T_2(1 + N_1)]}. \tag{20}$$

При помощи полученного эквивалентного коэффициента передачи можно, если ограничиться первым приближением найти огибающую сигнала на выходе при любом виде огибающей на входе. Как следует из формулы

20), эквивалентная частотная характеристика в сильной степени зависит от среднего уровня входного сигнала (A). Примерный вид эквивалентных частотных характеристик системы АРУ для различных величин A показан на рис. 2. Из графика видно, что чем больше средний уровень сигнала на входе, тем шире полоса частот , отрабатываемых системой АРУ.

Глубина синусоидальной модуляции на выходе $m_{вых}$ определится из формул (16), (19) и (20):

$$m_{вых} = m \frac{\sqrt{\left[\left(1+\omega_0^2T_1^2\right)\left(1+N_2+\omega_0^2T_2^2\right)+N_1\left(1+\omega_0^2T_2^2\right)\right]^2+}}{(1+N_1+N_2-\omega_0^2T_1T_2)^2+} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\overline{+\left[N_1\omega_0T_1\left(1+\omega_0^2T_2^2\right)+N_2\omega_0T_2\left(1+\omega_0^2T_1^2\right)\right]^2}}{+\omega_0^2\left[T_1(1+N_2)+T_2(1+N_1)\right]^2}\, m, \qquad (21)$$

фаза синусоидальной огибающей на выходе будет отличаться от фазы огибающей на входе величиной

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{N_1\omega_0T_1(1+\omega_0^2T_2^2)+N_2\omega_0T_2(1+\omega_0^2T_1^2)}{(1+\omega_0^2T_1^2)(1+N_2+\omega_0^2T_2^2)+N_1(1+\omega_0^2T_2^2)}\right]. \qquad (22)$$

Аналогичным образом, используя выражения (17) и (18), можно вычислить амплитуду и фазу второй гармоники, что может оказаться необходимым, когда на выходе приемника нет узкополосных устройств, настроенных на частоту синусоидальной огибающей сигнала. Анализ показывает, что последовательные приближения быстро сходятся при выполнении условия $m < 1$, поэтому для большинства случаев практики можно ограничиться полученными выражениями для характеристик сигнала на выходе.

Таким образом, в настоящей работе проанализировано воздействие сигнала, модулированного по любому закону, на двухпетлевую систему АРУ. В виде примера рассмотрен случай синусоидальной модуляции. Используя полученное решение уравнения (5), можно проанализировать и воздействие сигнала с огибающей, изменяющейся по случайному закону, на АРУ рассматриваемого вида, подобно тому, как это сделано в [2] для простой однопетлевой системы АРУ.

ЛИТЕРАТУРА

Г. П. Тартаковский, Динамика систем автоматической регулировки усиления, ГЭИ, 1957.

В. В. Широков, В. Г. Репин, Воздействие помех на систему автоматической регулировки усиления, Радиотехника, 1959, 14, 4, 65.

Поступила в редакцию
13 V 1959

1960 № 2

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

В. Н. Иванов

Предложен вариационный метод решения задачи об основной волне в периодической многопроводной линии. Найден функционал, принимающий для потенциала стационарное значение. В качестве примера решена задача о многорядной многопроводной линии с проводниками в виде бесконечно тонких лент.

ВВЕДЕНИЕ

Для расчета штыревой замедляющей системы методами теории многопроводных линий [1—3] необходим предварительный расчет поля основной TEM-волны в регулярной многопроводной линии, один или несколько отрезков которой вместе с неоднородностями образуют штыревую замедляющую систему. Точное решение задачи о TEM-волне в многопроводной линии известно только для случая однорядной линии с проводниками ленточной и эллиптической форм [4]. При переходе к многорядной линии и проводникам иной формы получить точное решение весьма затруднительно, поэтому необходима разработка приближенных методов решения этой задачи.

Известная в этом направлении работа Флетчера [5], относящаяся к линии с прямоугольными проводниками, страдает существенным недостатком: сделанное в ней предположение об однородности поля между соседними проводниками в общем случае неудовлетворительно отражает его действительное распределение, в силу чего точность расчета оказывается недостаточной. Задача о TEM-волне в многорядной многопроводной линии с проводниками прямоугольной формы решается приближенно в [6], однако использованный в этой работе метод конформных отображений также дает некоторую ошибку, величина которой возрастает при уменьшении толщины проводников.

В настоящей работе для расчета многопроводной линии применен вариационный метод, позволяющий рассчитывать поле основной волны с любой степенью точности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поперечное сечение проводников многопроводной линии, рассматриваемой обычно в теории штыревых замедляющих систем, можно получить периодическим повторением в направлениях x и z параллелограмма периодов линии Σ (рис. 1) вместе с заключенными внутри него контурами проводников S_1, S_2,..., S_m,..., S_p, совокупность которых обозначим через S. В частном случае одна из сторон параллелограмма может быть равной бесконечности, что отвечает периодичности линии только в одном направлении. Из всех возможных видов колебаний такой многопроводной линии практический интерес представляют только такие, для которых все величины, характеризующие поле, удовлетворяют соотношению типа Флоке

$$f(x + 2an,\ z + 2bl) = f(x, z)\, e^{-i(n\varphi + l\psi)}, \tag{1}$$

где n и l — произвольные целые числа.

Поле TEM-волны в рассматриваемой многопроводной линии может быть описано скалярным потенциалом u, удовлетворяющим в плоскости xz уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{2}$$

граничным условиям на контурах проводников

$$u|_S = V, \tag{3}$$

где для каждого m $V|_{S_m} = V_m = \text{const}$, и условию (1).

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА

Для отыскания приближенного решения поставленной краевой задачи воспользуемся вариационным методом. Из теоремы Томсона [7] следует, что функционал

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \, d\Omega, \tag{4}$$

где Ω — область, ограниченная параллелограммом Σ и контурами проводников S, определенный на множестве функций, удовлетворяющих условиям (1) и (3), принимает минимальное значение для функции, удовлетворяющей уравнению (2). Таким образом, приближенное решение может быть найдено путем построения минимизирующей последовательности, например, по методу Ритца. Неудобство, однако, заключается в трудности построения системы координатных функций, удовлетворяющих условиям (1) и (3).

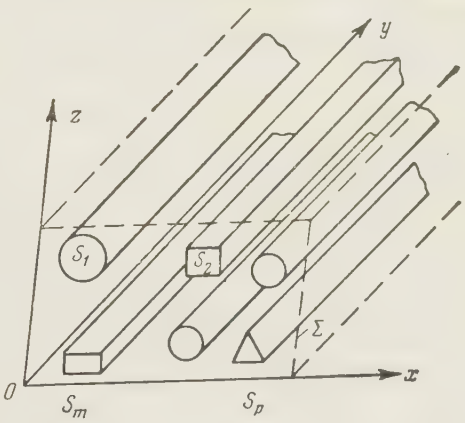


Рис. 1

Для облегчения построения системы координатных функций превратим граничное условие (3) в естественное, пользуясь правилом множителей Лагранжа [8]. Тогда решение задачи сводится к отысканию стационарного значения функционала

$$F(u, g) = \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \, d\Omega - \int_S [g(u^* - V^*) + g^*(u - V)] \, dS, \tag{5}$$

где $g(S)$ — множитель Лангранжа.

Непосредственно можно проверить, что естественными граничными условиями для этого функционала будут условие (3) и условие

$$g = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S, \tag{6}$$

где символ $\partial/\partial\nu$ означает производную, взятую по нормали, внешней по отношению к области Ω. Таким образом, координатные функции при отыскании стационарного значения функционала (5) должны удовлетворять только условию (1). При этом существенно, что стационарное значение функционала (5) совпадает с минимальным значением функционала (6).

3. ОТЫСКАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Если $\{u_n\}$ — система координатных функций, заданных в области Ω и удовлетворяющих условию (1), а $\{g_l\}$ — система координатных функций, заданных на совокупности контуров S, то приближенное значение функций u и g, реализующих стационарное значение функционала, может

быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{N} a_n u_n, \\ g &= \sum_{l=1}^{L} b_l g_l, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где коэффициенты a_n и b_l определяются из полученной по методу Ритца системы линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} a_n \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u_n \operatorname{grad} u^*_{n'})\, d\Omega - \sum_{l=1}^{L} b_l \int_{S} g_l u^*_{n'} ds = 0, \quad n' = 1, 2, \ldots, N, \\ &\sum_{=1}^{N} a_n \int_{S} u_n g^*_l dS - \int_{S} V g^*_l dS = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, L. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

4. ВОЛНОВАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Важным параметром, используемым при расчете штыревых замедляющих систем, является волновая проводимость

$$M_m(\varphi, \psi) = \frac{I_m}{V_m}, \tag{9}$$

где I_m — ток, протекающий в m-м проводнике; V_m — потенциал m-го проводника. Этот параметр через потенциал u может быть выражен следующим образом:

$$M_m(\varphi, \psi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \frac{1}{V_m} \int_{S_m} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS. \tag{10}$$

Если многопроводная линия является одноступенчатой в направлениях x и z (один проводник в параллелограмме Σ), то волновая проводимость может быть выражена через стационарное значение функционалов (4) или (5). Действительно, по формуле Грина имеем

$$-\int_{\Omega} \Delta u u^* d\Omega = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 d\Omega - \int_{S+\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u^* dS. \tag{11}$$

Точное решение удовлетворяет уравнению (2), поэтому интеграл в левой части равенства (11) равен нулю. Контурный интеграл, взятый по параллелограмму Σ, в правой части также равен нулю в силу условия (1). В результате, принимая во внимание, что $u^*|_S = V^*$, получаем

$$M(\varphi, \psi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \frac{1}{|V|^2}\, \Phi(u) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \frac{1}{|V|^2}\, F(u, g), \tag{12}$$

где под $\Phi(u)$ и $F(u, g)$ следует понимать их стационарное значение.

Отметим, что приближенное значение функционала $F(u, g)$ с учетом уравнений (8) может быть записано в виде

$$F(u, g) = \sum_{n,\, n'=1}^{N} a_n a^*_{n'} \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u_n \operatorname{grad} u^*_{n'})\, d\Omega. \tag{13}$$

Так как при приближенном решении точность значения стационарного функционала всегда значительно выше точности получаемого при этом решения краевой задачи, формула (12) значительно упрощает расчет волновой проводимости одноступенчатой многопроводной линии.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим частный случай одноступенчатой в направлениях x и z системы при условии, что параллелограмм Σ является прямоугольником, а проводники — бесконечно тонкими лентами шириной $2d$ (рис. 2). Координатные функции u_n, удовлетворяющие условию (1), выберем таким образом, чтобы они уже были решением уравнения Лапласа:

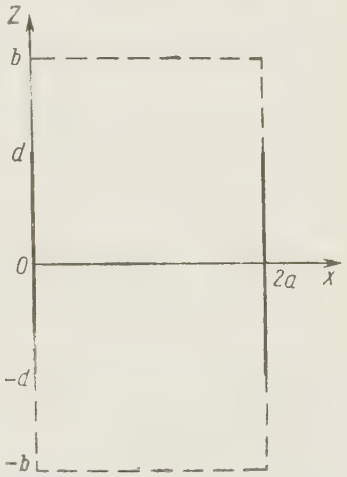


Рис. 2

$$u_n = e^{-2|\beta_n|a}\left[(e^{-i\varphi} - e^{-2|\beta_n|a})\, e^{|\beta_n|x} + \right.$$
$$\left. + (e^{2|\beta_n|a} - e^{-i\varphi})\, e^{-|\beta_n|x}\right] e^{-i\beta_n z}, \qquad (14)$$

где $\beta_n = (\psi + 2\pi n)/2b$. Координатные функции g_n определим следующим образом:

$$g_n = \left.\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\right|_S.$$

В этом случае вариационным методом удается найти точное решение, поэтому будем искать его в виде бесконечного ряда. Тогда уравнения (8), определяющие коэффициенты a_n, образуют бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_n \frac{\sin \pi (l-n)\frac{d}{b}}{\pi (l-n)\frac{d}{b}} = \frac{\sin \beta_l d}{\beta_l d}, \quad l = 0, \pm 1, \ldots, \qquad (15)$$

где

$$a'_n = a_n e^{-2|\beta_n|a} 2 \operatorname{sh} 2|\beta_n| a.$$

Методы решения подобных систем известны [9], но в рассматриваемом случае можно воспользоваться имеющимся решением краевой задачи для предельного случая $a \to \infty$ [4]. Используя это решение, находим коэффициенты a_n:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{e^{2\beta_n a}}{2 \operatorname{sh} 2\beta_n a}\dfrac{\sin\frac{\psi}{2}}{P_{-\frac{\psi}{2\pi}}\left(\cos\pi\frac{b-d}{b}\right)}\dfrac{P_n\left(\cos\pi\frac{d}{b}\right)}{n+\frac{\psi}{2\pi}}, & n \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{e^{-2\beta_n a}}{2 \operatorname{sh} 2\beta_n a}\dfrac{\sin\frac{\psi}{2}}{P_{-\frac{\psi}{2\pi}}\left(\cos\pi\frac{b-d}{b}\right)}\dfrac{P_{-n-1}\left(\cos\pi\frac{d}{b}\right)}{n+\frac{\psi}{2\pi}}, & n < 0, \end{cases} \qquad (16)$$

где $P_S(x)$ — функция Лежандра. Пользуясь формулами (12) и (13), определим волновую проводимость

$$M(\varphi, \psi) = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\sin^2\frac{\psi}{2}}{\left[P_{-\frac{\psi}{2\pi}}\left(\cos\pi\frac{b-d}{b}\right)\right]^2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} 2\beta_n a - \cos\varphi}{\operatorname{sh} 2\beta_n a}\frac{\left[P_n\left(\cos\pi\frac{d}{b}\right)\right]^2}{n+\frac{\psi}{2\pi}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\operatorname{ch} 2\beta_n a - \cos\psi}{\operatorname{sh} 2\beta_n a}\frac{\left[P_{-n-1}\left(\cos\pi\frac{d}{b}\right)\right]^2}{n+\frac{\psi}{2\pi}}\right\}. \qquad (17)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье вариационным методом дается приближенное решение задачи об основной волне в многопроводной линии. Устанавливается, что при использовании функционала (5) решение можно искать в классе функций, удовлетворяющих только условиям типа Флоке. Для одноступенчатой в направлениях x и z многопроводной линии показано, что указанный функционал пропорционален волновой проводимости. В частном случае одноступенчатой линии с ленточными проводниками предлагаемый метод позволяет найти точное решение.

В заключение приношу благодарность В. С. Михалевскому за предложенную тему и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Leblond, G. Mourier, Étude des lignes á barreaux á structure périodique pour tubes électroniques, Ann. radioélectr., 1954, 9, 36, 180.
2. A. Leblond, G. Mourier, Étude des lignes á barreaux á structure périodique, Ann radioélectr., 1954, 9, 38, 311.
3. Р. А. Силин, Расчет многорядных штыревых замедляющих систем, Сб. Электроника, 1958, 2, 3.
4. Chiao-Min-Chu, Propagation of waves in helical wave guides, J. Appl. Phys., 1958, 29, 1, 88.
5. R. C. Fletcher, A broad band interdigital circuit for use in travelling-wave-type amplifiers, Proc. I. R. E., 1952, 40, 8, 951.
6. И. Ш. Белуга, К расчету полей поперечных электромагнитных волн в штыревых замедляющих системах, Изв. МВО СССР (Радиофизика), 1959, 2, 1, 87.
7. Дж. Л. Стрэттон, Теория электромагнетизма, ГТИ, 1948.
8. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, ГТИ, 1951, 1.
9. В. С. Рогожин, Один класс бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, Докл. АН СССР, 1957, 114, 3, 486.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступила в редакцию
11 V 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1960 № 2

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ПЛАЗМОЙ

Е. В. Богданов, В. Я. Кислов, З. С. Чернов

Рассматривается задача о взаимодействии ограниченного электронного потока с плазмой. Получено дисперсионное уравнение и проанализированы условия нарастания ВЧ-сигнала. Экспериментально исследовалась система, в которой промодулированный поток электронов взаимодействует с плазмой газового разряда, находящейся в продольном магнитном поле. В диапазоне от 30 до 3 *см* были получены плазменные усиления до 40 *дб*.

ВВЕДЕНИЕ

Освоение миллиметрового диапазона волн наталкивается, как известно, на очень серьезные трудности. Копирование различных приборов сантиметрового диапазона волн приводит к тому, что пучки в подобных приборах миллиметрового диапазона волн становятся слишком мощными, а замедляющие структуры или резонаторы слишком миниатюрными. При укорочении рабочей длины волны таким способом трудно предотвратить разрушение металлических структур тем самым электронным потоком, который должен взаимодействовать с полями структур.

Одно время казалось, что открылась возможность проникновения в миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны при помощи использования излучения релятивистских электронных потоков. Действительно, расчеты показывают, что сгруппированный поток релятивистских электронов эффективно излучает, при прохождении через ондулятор, вблизи диэлектрика и даже в пустой металлической трубе. Однако при детальном теоретическом и экспериментальном изучении оказалось, что узловой проблемой подобных устройств является не столько высвечивающая система, сколько группировка электронного потока, который должен быть богат гармониками, т. е. должен иметь резко очерченные сгустки электронов, соизмеримые с рабочей длиной волны. Создание таких сгустков в потоках, которые необходимо ускорять до релятивистской скорости, в настоящий момент представляется задачей может быть не менее трудной, чем создание достаточно выносливых структур для приборов с замедленными волнами типа ЛБВ и ЛОВ. В то же время продолжаются упорные поиски новых физических механизмов для генерирования и усиления коротких длин волн.

В данной работе мы более подробно остановимся на плазме, которая представляется многообещающей средой для усиления и генерирования коротких длин волн. Привлекательно в плазме то, что она, обладая колебательными и волноведущими свойствами, в противоположность металлическим структурам, является проницаемой для электронных потоков. Открытые Ленгмюром и Тонксом колебательные свойства плазмы послужили источником большого количества исследований. В работах Власова [1], Ландау [2], Бома и Гросса [3] была развита подробная теория колебаний плазмы и распространения в ней волн. Последующие работы, в том числе Ахиезера и Файнберга [4] и Ламперта [5], более определенно указали на возможность усиления высокочастотных колебаний при взаимодействии электронной составляющей плазмы с быстрым электронным потоком.

В теоретической работе Ахиезера и Файнберга было показано, что состояние безграничного электронного потока, пронизывающего безгранич-

ную плазму, является неустойчивым. Это приводит к нарастанию волн плотности пространственного заряда в электронном потоке, сопровождающемуся возбуждением в плазме продольных электростатических волн с нарастающей амплитудой. Авторами было получено дисперсионное уравнение системы:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \gamma^2 v_т^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - \gamma v_e)^2} = 1, \qquad (1)$$

где ω — частота сигнала; ω_p — частота электронных колебаний плазмы; ω_{pe} — угловая плазменная частота пучка; $v_т = (3kT/m)^{1/2}$ — среднеквадратичная тепловая скорость; v_e — скорость пучка; γ — волновое число в среде.

Подробный анализ решения уравнения (1) был проведен Лампертом, который особое внимание уделил определению условий, необходимых для получения значительных усилений на предельно высоких частотах. Существенным с этой точки зрения выводом является то, что усиление отсутствует для частот сигнала выше критической

$$\omega_e = \omega_p \left[1 + \left(\frac{v_т}{v_e} \right) \left(\frac{n_e}{n} \right)^{1/2} \right]$$

(n_e и n — концентрации электронов в пучке и плазме соответственно). Максимальное усиление получается на частотах сигнала $\omega = \omega_p \left[1 - \frac{v_т}{v_e} \left(\frac{n_e}{n} \right)^{1/2} \right]$, т. е. частотах, близких к частоте плазмы. Таким образом, при использовании плазмы в качестве активной среды для усиления коротких волн необходимо получение плазмы с очень высокой концентрацией электронов. Выводы теории плазменных колебаний нашли подтверждение в экспериментах Бойда, Филда, Голда [6], в которых модулированный поток пронизывал область газового разряда. В 10-*см* диапазоне волн были зарегистрированы эффекты усиления первоначальной модуляции. В свете приведенных данных кажется необходимым более подробное изучение свойств плазмы как элемента возможных устройств для усиления и генерирования коротких волн.

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОГРАНИЧЕННОГО МОДУЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ПЛАЗМОЙ

Существующие теории посвящены рассмотрению взаимодействия безграничного потока с безграничной плазмой. Такая система весьма абстрактна. Для получения более надежных выводов следует подвергнуть анализу более близкую к реальным условиям систему, где хотя бы электронный пучок является ограниченным.

Следует отметить, что в работе [7] рассматривалось влияние плазмы на взаимодействие ограниченного электронного потока с волной, бегущей вдоль замедляющей структуры. Роль плазмы фактически сводилась к эффекту, аналогичному влиянию диэлектрика, несколько изменяющего дисперсионные свойства системы. Математически исследовались решения, близкие к волнам в «холодной» системе, и влияние плазмы на эти волны.

С точки зрения взаимодействия электронного потока с плазмой рационально рассмотреть решения, близкие к плазменным волнам, которые могут распространяться в ограниченной плазме, или к волнам пространственного заряда в электронном потоке. Дальнейшее рассмотрение будет относиться к последнему случаю.

Итак, пусть цилиндрический электронный поток радиуса a пронизывает безграничную плазму в направлении оси z. Если предположить,

что плотности токов и скорости электронов в пучке и плазме имеют только продольные компоненты и переменные составляющие всех величин пропорциональны $e^{i(\omega t-\gamma z)}$, то совместное рассмотрение уравнений поля и уравнений движения электронов приводит к следующему уравнению для поляризационного потенциала:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2}+T^2\Pi=0, \tag{2}$$

где

$$T^2=(\gamma^2-k^2)\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2}+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2\left(1-\frac{\gamma}{\gamma_e}\right)^2}-1\right], \tag{3}$$

γ — волновое число в среде; k — волновое число в вакууме; γ_e — электронное волновое число; ω_{pe} отлично от нуля при $r<a$.

Разбивая пространство на две области, одна из которых $(0\leqslant r\leqslant a)$ содержит электронный поток и плазму, а другая $(r\geqslant a)$ содержит только плазму, и сшивая решения на границе пучка $r=a$, получаем дисперсионное уравнение

$$Ta\frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)}=\tau a\frac{H_1^{(2)}(\zeta a)}{H_0^{(2)}(\zeta a)}, \tag{4}$$

где

$$\tau^2=(\gamma^2-k^2)\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1\right), \tag{5}$$

если $\tau^2>0$,

и

$$Ta\frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)}=\tau_1 a\frac{K_1(\tau_1 a)}{K_0(\tau_1 a)}, \tag{6}$$

если $\tau_1^2>0$, где $\tau_1^2=-\tau^2$, $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля нулевого порядка второго рода, соответствующая волне, уходящей от электронного потока, K_0 — модифицированная функция Бесселя.

Ограничимся рассмотрением таких волн в системе, фазовая скорость которых близка к v_e. В этом случае в дисперсионном уравнении можно отбросить члены порядка k^2/γ^2 и положить в правой части $\gamma=\gamma_e$. Правая часть дисперсионного уравнения оказывается функцией $\gamma_e a$ и ω_p/ω и легко вычисляется. Левую часть дисперсионного уравнения $f(z)=z-\frac{J_1(z)}{J_0(z)}$ также можно построить во всей комплексной плоскости. Она построена, например, в работе [8]. Сопоставляя функции, описывающие правую и левую части дисперсионного уравнения (4), (6), находим зависимость Ta от τa. Это дает нам возможность найти непосредственно постоянную распространения и ее мнимую часть. Усиление на единицу длины системы выражается простой формулой

$$G_e=8{,}69\gamma_{pe}q\ дб/м, \tag{7a}$$

где $\gamma_{pe}=\omega_{pe}/v_e$ — плазменное волновое число электронного потока.

Проведем учет граничных условий на входе в плазму. Пусть на границу плазмы $(z=0)$ падает модулированный пучок. Без уменьшения общности можно полагать, что при $z=0$ переменная составляющая плотности тока волн пространственного заряда в пучке $j(0)=0$, а переменная скорость $v(0)$ равна своему максимальному значению. В системе плазма — электронный поток возбуждаются, согласно (XVIII), две волны

пространственного заряда, одна из которых затухает, а другая нарастает. Граничные условия при $z = 0$ имеют вид

$$j_1 + j_2 = 0,$$
$$v_1 + v_2 = v(0).$$

Учитывая, что $j = \rho_0 v / \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_e}\right)$, а $\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_e}\right)$ определяется из (XVIII), получаем

$$v_1 = v_2 = \frac{v(0)}{2}.$$

Поскольку мощность переменного тока в пучке пропорциональна переменной скорости, то, следовательно, на возбуждение возрастающей волны тратится половина первоначальной мощности и формула для коэффициента усиления принимает вид

$$G = (8{,}69\gamma_{pe}ql - 3)\ дб, \qquad (7б)$$

где l — длина области взаимодействия.

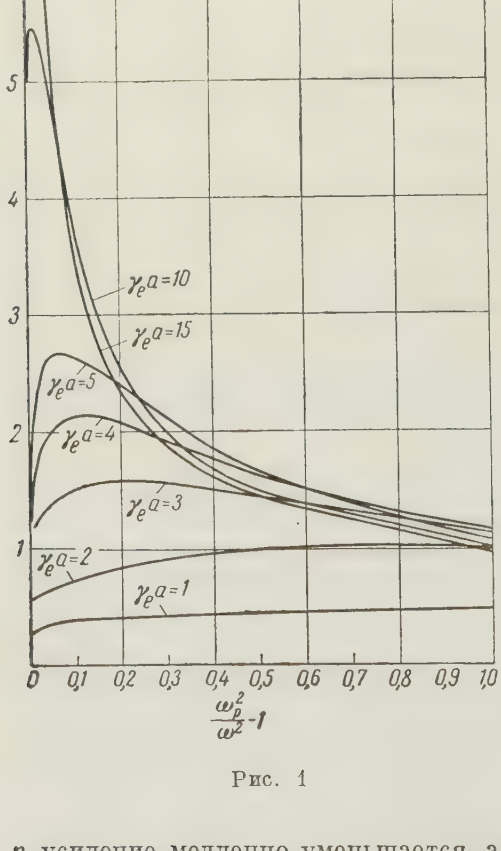


Рис. 1

График величины q представлен на рис. 1. Величина γ_{pe} равна $\left(\frac{e}{m\varepsilon_0}\frac{j_e}{v_e^3}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{j_0}{U_0^{3/2}}\right)^{1/2}$, т. е. прямо пропорциональна квадратному корню из первеанса пучка. Величина q определяется двумя параметрами: $\gamma_e a$ и ω_p/ω.

Метод подсчета величины q ($\gamma_e a$, ω_p/ω) изложен в Приложении.

Наиболее важной зависимостью является зависимость усиления от ω_p^2/ω^2 или, если рассматривать усиление на фиксированной частоте, от относительной концентрации n/n_0, где n_0 соответствует плазменному резонансу для данной частоты. Характер зависимости следующий: при $n < n_0$ усиления нет, начиная с $n = n_0$ усиление резко возрастает, после чего зависимость от концентрации становится слабой; при дальнейшем увеличении n усиление медленно уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю.

При больших $\gamma_e a$, когда мы фактически приближаемся к плоскому случаю, зависимость усиления от концентрации принимает все более и более резонансный характер, приближаясь в пределе при $\gamma_e a \to \infty$ к идеальному резонансу при $\omega = \omega_p$. Как и всегда, при идеальном резонансе нужно учитывать потери, т. е. влияние соударений и теплового разброса. Так как $f_{соуд}/f \ll 1$, то учет теплового разброса более существен. Строгое статистическое рассмотрение проведено в Приложении. В результате такого рассмотрения получается уравнение (4), (6), но в

выражениях для T и τ появляются тепловые члены:

$$T^2 = (\gamma^2 - k^2)\left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2\left(1-\frac{\gamma}{\gamma_e}\right)^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2\left(1-\frac{\gamma^2 v_т^2}{\omega^2}\right)} - 1\right], \tag{8}$$

$$\tau^2 = (\gamma^2 - k^2)\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2\left(1-\frac{\gamma^2 v_т^2}{\omega^2}\right)} - 1\right]. \tag{9}$$

В том случае, когда γ близко к γ_e, $v_т/v_e \ll 1$, поправка, связанная с наличием теплового разброса, мала, т. е. тепловой разброс очень слабо влияет на взаимодействие электронного потока с плазмой.

Учет тепловых членов, как уже говорилось, существен при резонансе, который получается при больших $\gamma_e a$. Полагая $\gamma_e a \to \infty$, мы практически переходим к плоскому случаю, когда в уравнении для П зависимость от радиуса исчезает и дисперсионное уравнение имеет вид $T^2 = 0$, что совпадает с уравнением, полученным Ахиезером. Однако плоский случай практически вряд ли осуществим.

Интересной является зависимость от γa пучка. Усиление обычных приборов, например, типа ЛБВ, сильно уменьшается на более коротких волнах из-за увеличения γa замедляющей структуры. Это связано с прижиманием полей к замедляющим структурам. В случае плазмы этого уменьшения, естественно, нет, так как плазма является проницаемой для электронного потока и не существует какого-либо фактора спадания полей, влияющего на эффективность взаимодействия. Усиление в плазме растет при увеличении γa, что дает возможность получить эффективное взаимодействие на более высоких частотах при сравнительно больших поперечных размерах электронного потока.

Наиболее важным является вывод о необходимости создания плазменных концентраций, бóльших некоторой критической величины, определяемой формулой Ленгмюра:

$$n > \left(\frac{f}{9000}\right)^2.$$

Например, при $f = 9000$ *Мгц* $n = 10^{12}$ $1/см^3$, при $f = 90\,000$ *Мгц* $n = 10^{14}$ $1/см^3$.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Как показывает теоретический анализ, для получения усиления высокочастотного сигнала в системе плазма — пучок в области коротких длин волн необходимы большие концентрации электронов в плазме. Изучение

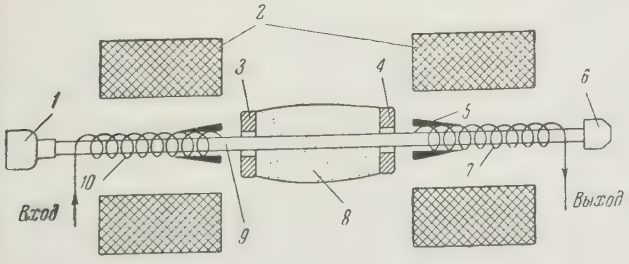


Рис. 2. Схематическое изображение экспериментального прибора:

1 — электронная пушка; *2* — магнитные катушки; *3* — катод; *4* — анод; *5* — поглотитель; *6* — коллектор; *7* — демодулирующая спираль; *8* — плазма; *9* — электронный поток; *10* — модулирующая спираль

различных видов разрядов привело к созданию разрядного промежутка, изображенного на рис. 2. Разрядный промежуток состоит из кольцевого подогревного катода с оксидным покрытием, против которого располагается кольцевой анод. Между этими кольцевыми электродами зажигался

разряд в парах ртути при давлениях порядка нескольких микрон. Ток разряда можно было изменять от нуля до нескольких ампер. Разрядный промежуток помещался между магнитными катушками. Они создавали распределение магнитного поля в области разряда такого вида, которое используется в плазменных ловушках с магнитными пробками. Таким образом, удалось получить плазму с высокой электронной концентрацией и провести исследования системы плазма — электронный поток в широком диапазоне частот.

В экспериментальном устройстве электронный поток, создаваемый специальной пушкой, проходил входную модулирующую секцию спирали, далее через отверстия в катоде и аноде пространство взаимодействия, заполнен-

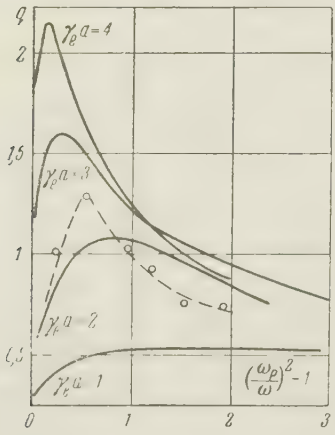


Рис. 3

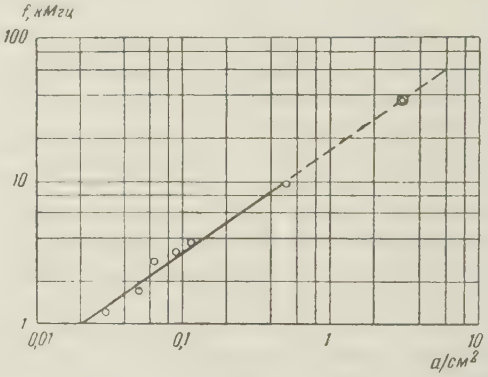


Рис. 4

ное плазмой, и, наконец, выходную секцию спирали. При зажигании разряда прохождение электронного потока через систему не изменялось, что было необходимо для получения надежных данных о взаимодействии пучка с плазмой. На данном экспериментальном устройстве в диапазоне длин волн от 30 до 3 *см* были получены плазменные усиления от 20 до 40 *дб*. При этом ток разряда составлял 100—200 *ма*, а ток пучка был менее 1 *ма*. Под плазменным усилением подразумевается то дополнительное усиление, которое возникает при включении разряда. Усиление типа ЛБВ на отрезках спиралей, которое не изменялось при включении разряда в плазменное усиление, естественно, не включается.

Зависимость усиления от тока разряда позволила сопоставить результаты теоретического и экспериментального анализов. На рис. 3 приведена зависимость параметра усиления q от квадрата частоты плазмы $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1$. Сплошные кривые являются расчетными и соответствуют различным значениям $\gamma_e a$ пучка. Экспериментальная кривая обозначена пунктиром. Следует обратить внимание на хорошее совпадение расчетных и экспериментальных максимумов усиления и общего хода зависимости. Кроме того, видно, что реальное $\gamma_e a$ пучка в плазменном промежутке было порядка 2,5.

На рис. 4 изображена наиболее важная зависимость, которая указывает на возможность использования плазмы для усиления миллиметровых длин волн. По оси ординат отложена частота сигнала в килогерцах, а по оси абсцисс плотность тока в разряде, при которой были получены максимальные усиления на соответствующих частотах. Максимальное усиление на частоте 1200 *Мгц* было получено при плотности тока 0,03 *а/см²*; частоте 10 000 *Мгц* соответствовала плотность тока 0,5 *а/см²*. Для усиления сигнала на волне $\lambda = 8$ *мм*, как видно из приведенного графика, требу-

ется плотность тока 3 $a/см^2$. Разрядный промежуток, использованный в экспериментах, позволял получить плотности тока в несколько раз большей величины.

Рассмотрим далее наиболее интересные зависимости, характеризующие усилительные свойства системы плазма — пучок. На рис. 5 представлен ход усиления в зависимости от плотности тока разряда для различных длин волн. Здесь хорошо видна предсказанная теорией отсечка усиления для частот сигнала выше критической частоты. При увеличении частоты плазмы по сравнению с частотой сигнала усиление сохраняется, медленно убывая.

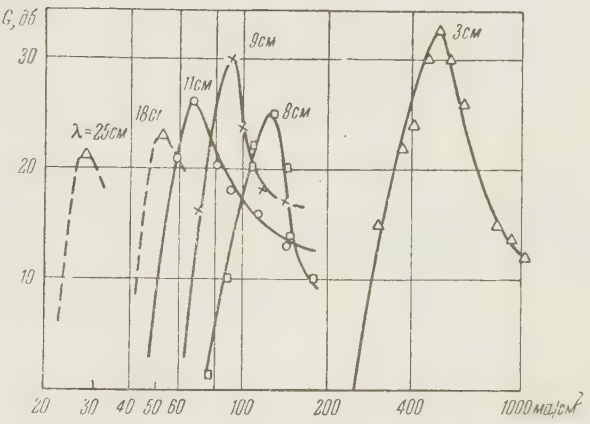


Рис. 5

Непосредственно частотная зависимость усиления при заданных режимах представлена на рис. 6, где по оси ординат отложено усиление, а по оси абсцисс частота. Различные кривые соответствуют разным значениям тока разряда. Три верхние кривые с большими токами соответствуют перемещению по правой от максимума части кривой на рис. 5, а две нижние с меньшими токами — по левой более крутой части. Следует обратить внимание на тот факт, что хотя для усиления в данном случае используются резонансные свойства плазмы, реальные усилительные характеристики

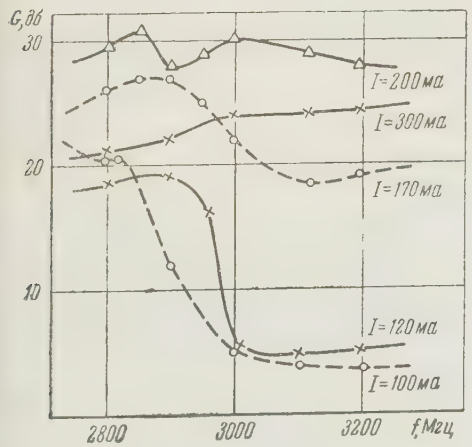


Рис. 6

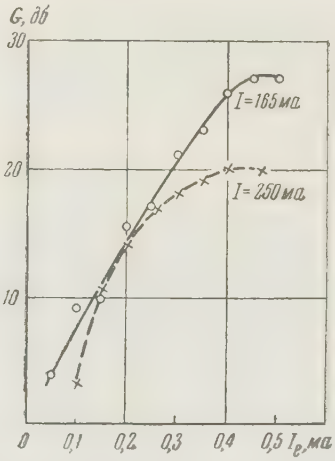


Рис. 7

системы являются весьма широкополосными, сходными с характеристиками ЛБВ и двухлучевых усилителей.

На рис. 7 изображены зависимости усиления от тока пучка для двух значений тока разряда. При увеличении тока пучка сначала наблюдается резкий рост усиления, а затем участок насыщения. В процессе экспериментов были сделаны попытки выяснить, какая область плазмы принимает активное участие во взаимодействии с пучком. Для этого в одном экспериментальном макете были опробованы два разрядных промежутка с

различными внешними диаметрами разрядных электродов (отношение диаметров 1,5). Заметного изменения усиления не наблюдалось, хотя общий ток изменился в 2 раза. Это является указанием на то, что в процессе взаимодействия главную роль играет область плазмы, пронизываемая пучком и непосредственно прилегающая к пучку.

Таким образом, развитие исследований по плазме убеждает нас в возможности получения необходимых высоких электронных концентраций и эффективном взаимодействии плазмы с электронными потоками. Это в свою очередь укрепляет надежду, что и другие возможные механизмы усиления и генерирования коротких волн, основанные на использовании колебательных свойств плазмы, окажутся эффективными.

Приложение

1. ПОЛУЧЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

При рассмотрении задачи о взаимодействии модулированного цилиндрического электронного потока радиуса a с безграничной плазмой исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$(\Delta + k^2)\,\Pi = -\frac{j}{i\omega\varepsilon_0}, \tag{I}$$

$$i\omega v_e + \frac{\partial v_e}{\partial z} v_0 = \eta E, \tag{II}$$

$$i\omega v_p = \eta E, \tag{III}$$

$$i\omega \rho_e = -\frac{\partial j_e}{\partial z}, \tag{IV}$$

$$j = j_p + j_e = \rho_{0p} v_p + \rho_{0e} v_e + v_0 \rho_e, \tag{V}$$

где Π — поляризационный потенциал, связанный с электромагнитным полем соотношениями

$$E = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} + k^2)\,\Pi,$$

$$H = i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot}\Pi. \tag{VI}$$

В нашем случае $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}(0, 0, \Pi_z)$; Δ — оператор Лапласа; $\eta = e/m$. Индексы e и p относятся соответственно к электронному потоку и плазме.

Из исходных уравнений можно выразить переменные плотности токов в пучке и плазме через поляризационный потенциал:

$$j_e = \frac{\rho_{0e}\eta\,(k^2 - \gamma^2)}{i\omega\left(1 - \dfrac{\gamma}{\gamma_e}\right)^2}\,\Pi, \tag{VII}$$

$$j_p = \frac{\rho_{0p}\eta\,(k^2 - \gamma^2)}{i\omega}\,\Pi. \tag{VIII}$$

Разобьем пространство на две области:

1) $0 \leqslant r \leqslant a$ — область, содержащая электронный поток и плазму,

2) $r \geqslant a$ — область, содержащая только плазму. Для первой области из (I), (VII) и (VIII) получаем

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2} + T^2\Pi = 0, \tag{IX}$$

где

$$T^2 = (\gamma^2 - k^2)\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2\left(1 - \dfrac{\gamma}{\gamma_e}\right)^2} - 1\right]. \tag{X}$$

Аналогично для второй области имеем

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2} + \tau^2\Pi = 0, \tag{XI}$$

где

$$\tau^2 = (\gamma^2 - k^2)\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right). \tag{XII}$$

Ограничиваясь аксиально-симметричными решениями, для которых $\partial/\partial\theta = 0$, получим решение уравнения (9), конечное в нуле, в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathrm{I}} &= AJ_0(Tr), \\ E_{z\mathrm{I}} &= (k^2 - \gamma^2)\, AJ_0(Tr), \\ H_{\theta\mathrm{I}} &= i\omega\varepsilon_0 TAJ_0(Tr). \end{aligned} \tag{XIII}$$

Решение уравнения (11) для второй области имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathrm{II}} &= BH_0^{(2)}(\tau r), \\ E_{z\mathrm{II}} &= (k^2 - \gamma^2)\, BH_0^{(2)}(\tau r), \\ H_{\theta\mathrm{II}} &= i\omega\varepsilon_0\tau BH_1^{(2)}(\tau r), \end{aligned} \tag{XIV}$$

если $\tau^2 > 0$. Это решение соответствует волне, уходящей от электронного потока.

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathrm{II}} &= CK_0(\tau_1 r), \\ E_{z\mathrm{II}} &= (k^2 - \gamma^2)\, CK_0(\tau_1 r), \\ H_{\theta\mathrm{II}} &= i\omega\varepsilon_0\tau_1 CK_1(\tau_1 r), \end{aligned} \tag{XV}$$

если $\tau_1^2 > 0$, где $\tau_1^2 = -\tau^2$. Это решение соответствует волне, затухающей на бесконечности.

Непрерывность тангенциальных составляющих E_z и H_θ на границе $r = a$ дает дисперсионное уравнение

$$Ta\frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = \tau a\frac{H_1^{(2)}(\tau a)}{H_0^{(2)}(\tau a)}, \tag{XVI}$$

если $\tau^2 > 0$;
и

$$Ta\frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = \tau_1 a\frac{K_1(\tau_1 a)}{K_0(\tau_1 a)}, \tag{XVII}$$

если $\tau_1^2 > 0$.

2. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

При анализе дисперсионного уравнения воспользуемся методом, изложенным в работе [8]. Дисперсионное уравнение (XVI), (XVII) несколько упрощается, если мы будем интересоваться лишь волнами, фазовая скорость которых близка к v_0. Во-первых, можно положить $k^2 \ll \gamma^2$, во-вторых, так как правая часть уравнения — медленно меняющаяся функция γ, то можно положить $\tau a = \gamma_e a\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ и $\tau_1 a = \gamma_e a\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. Это дает нам возможность найти правую часть уравнения (XVI), (XVII) как функцию $\gamma_e a$ и ω_p/ω. Правая часть уравнения (XVI) является комплексной величиной. Правая часть уравнения (XVII) — действительная величина.

Если теперь построить левую часть $f(z) = z\frac{J_1(z)}{J_0(z)}$ во всей комплексной плоскости и сопоставить оба графика, то получим зависимость Ta от γa, после чего постоянная распространения и ее мнимая часть находятся непосредственно. Действительно, если Ta известно, то, полагая $Ta = \gamma_e a(m + in)$, из соотношения (X) находим

$$\gamma = \gamma_e \pm \gamma_{pe}\frac{1}{\sqrt{1 + (m + in)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}. \tag{XVIII}$$

Если обозначить

$$p + iq = \frac{1}{\sqrt{1 + (m + in)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}, \qquad \text{(XIX)}$$

то, находя m и n, а затем p и q согласно формулам (XVIII) и (XIX), находим интересующую нас постоянную распространения (XVIII) и усиление на единицу длины (7а).

3. УЧЕТ ТЕПЛОВОГО РАЗБРОСА

Более строгое статистическое рассмотрение сводится к совместному решению уравнения Власова и уравнений поля. В применении к задачам электроники СВЧ такое рассмотрение было проведено в работах [9,7].

В системе уравнений (I) — (V) уравнение (III) заменяется уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} v + \eta E \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0,$$

а

$$i_p = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{0p} v f(v)\, dv, \qquad \text{(XX)}$$

где f и f_0 — соответственно переменная и стационарная части функции распределения. Разыскивая решение в виде бегущих волн $e^{i(\omega t - \gamma z)}$, находим из (XX)

$$f = -\frac{\eta E \frac{\partial f_0}{\partial v}}{i\omega - i\gamma v}. \qquad \text{(XXI)}$$

Стационарную функцию распределения можно взять либо максвеллову

$$f_{01} = N \frac{m}{2kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \qquad \text{(XXII)}$$

либо П-образную

$$f_{02} = \frac{N}{2v_т} \int_{-\infty}^{v} [\delta(v + v_т) - \delta(v - v_т)]\, dv. \qquad \text{(XXIII)}$$

Результаты рассмотрения с той или иной функцией совпадают, если $v_т$ в формуле (XXIII) брать равной среднеквадратичной скорости при максвелловом распределении. Более просто работать с П-образной функцией.

Преобразовывая выражение для плотности тока, получим

$$j = (k^2 - \gamma^2) \frac{\eta \rho_0}{i\omega \left(1 - \frac{\gamma^2 v_т^2}{\omega^2}\right)} \Pi. \qquad \text{(XXIV)}$$

Таким образом, более строгое рассмотрение привело к появлению в правой части уравнения для П члена $\frac{1}{1 - \frac{\gamma^2 v_т^2}{\omega^2}}$. Дальнейший ход рассмотрения остается тем же, что и при $v_т = 0$, и приводит к дисперсионному уравнению (XVI), (XVII).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Власов, Теория многих частиц, ГИТТЛ, 1950.
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 1946, 16, 574.
3. D. Bohm, E. P. Gross, Phys. Rev., 1949, 75, 1851.
4. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, 1951, 21, 1262.
5. M. A. Lampert, J. Appl. Phys., 1956, 27, 5.
6. G. D. Boyd, L. M. Field, R. W. Gould, Phys. Rev., 1958, 109, 1393.
7. В. С. Никольский, Диссертация, Физический факультет МГУ, 1953.
8. C. K. Birdsell, J. R. Whinnery, J. Appl. Phys., 1953, 24, 314.
9. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, ГТИ, 1953.

Поступила в редакцию
21 V 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1960 № 2

О РАСЧЕТЕ НАВЕДЕННОГО ТОКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ *

В. И. Гайдук

Исходя из теоремы Рамо—Шокли для наведенного тока (н.т.) одиночного заряда, получены выражения для н.т. при произвольном заданном движении многих непрерывно вводимых в систему заряженных частиц. Эти выражения просты (см. формулу (3)), если при выходе из системы одни частицы не обгоняют другие. При наличии же обгона просто могут быть выражены компоненты Фурье н. т. в случае периодической или непериодической зависимости н.т. от времени (формулы (11) и (16) соответственно).

Эти выводы приложимы также к плотности заряда и плотности конвекционного тока (в точке) и вообще к любым аддитивным действиям каких-либо объектов, если только известно действие, вызываемое в системе каждым объектом.

В качестве примера рассмотрены идеализированные схемы генератора с тормозящим полем и монотрона, для которых найдены электронный кпд и гармоники н.т. Показано, что первая система имеет заметно большую эффективность, чем вторая, при полной идентичности вида основных характеристик и соответствующих математических выражений.

ВВЕДЕНИЕ

Движение заряженных частиц (электронов) в пространстве, содержащем какие-либо металлические проводники (резонаторы, разного рода волноведущие структуры), вызывает, как известно, появление наведенных токов на поверхности этих проводников. Знание н. т. помогает понять механизм работы электронных СВЧ-приборов и осуществить расчет их характеристик. Ток, наводимый одной заряженной частицей, определяется по известной теореме Рамо — Шокли [1—3]. В случае многих частиц необходимо просуммировать н. т. от отдельных частиц, и это вызывает специфические трудности в связи с тем, что часто трудно сказать, какие частицы находятся в системе в данный момент времени, а какие нет (если даже закон движения отдельных частиц известен). В литературе [3,4,7,8] обычно приводятся выражения, позволяющие рассчитывать н. т. только в случае так называемого «односкоростного» прямолинейного движения электронов, когда все интересующие величины являются простыми функциями точки (z) и времени t.

При наличии обгона электронов, т. е. как раз в самом интересном случае — при фазовой фокусировке и группировке электронов — выводы проводятся обычно с использованием величин, обращающихся в бесконечность в некоторых точках на оси z.

Формулы, позволяющие определить н. т. в общем случае заданного движения электронов при произвольной степени группировки и при наличии отсева электронов из системы, видимо, отсутствуют (для случая строфотрона задача решена Агдуром [9]). Для расчета возбуждения электромагнитных полей заданными источниками представляет интерес также определение плотностей заряда и тока, вычисление которых при сложном движении зарядов сопряжено с аналогичными трудностями. Поэтому представляется целесообразным провести общее рассмотрение.

Чтобы не делать изложения слишком абстрактным, проведем анализ сначала на примере н. т., а затем (в § 3) сделаем необходимое обобщение.

* Доложено 26 II 1959 г. на семинаре в ИРЭ АН СССР.

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Будем пренебрегать запаздыванием электромагнитных потенциалов во всей системе или в интересующей части системы. Тогда, согласно теореме Рамо — Шокли, заряд q, движущийся в системе проводников A, B,..., наводит на каком-либо проводнике (пусть это будет проводник A) ток *

$$I^q_{\text{Ан}} = q\,\mathbf{v}\mathbf{E}, \tag{1}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ — скорость заряда; $\mathbf{E} = \mathbf{E}\,(x,y,z)$ — статическая напряженность поля в месте нахождения заряда q, создаваемая единичным потенциалом, приложенным к выбранному проводнику (проводнику A) при заземлении прочих проводников (проводников B,...); при этом $\mathbf{E}\,(x,y,z)$ определяется при удаленном из системы заряде q. Заметим, что обычно соотношение (1) доказывается для случая, когда проводники A, B,... в исходной системе заземлены, но нетрудно показать справедливость (1) и для случая проводников A, B,..., несущих произвольные потенциалы U_A, U_B,....

В дальнейшем индекс A в выражении н. т. будем опускать.

Положим теперь, что электроны поступают в систему непрерывно сквозь площадку точечных размеров и пусть ток на входе в систему будет $I(\tau)$; $t = \tau$ обозначаем как время влета электрона в систему (обобщение на случай, когда электроны поступают в систему через некоторую поверхность, элементарно). Тогда н. т., создаваемый в произвольный момент t точечным зарядом $dq = I(\tau)d\tau$, есть, согласно (1),

$$I^{dq}_{\text{н}} = I\,(\tau)\,d\tau\,\mathbf{v}\,(\tau,\,t)\,\mathbf{E}\,(\tau,\,t). \tag{2}$$

Здесь учтен тот факт, что скорость заряда dq зависит от времени влета τ; кроме того, поле $\mathbf{E}(x,y,z)$ записано как функция τ и t через закон движения заряда dq : $x = x(\tau,t)$ и т. д.

Соотношение (2) автоматически учитывает закон сохранения заряда, так что, например, в случае прямолинейного движения электронов вдоль оси z отпадает необходимость в использовании обычно применяемой формулы

$$j\,(\tau)\,d\tau = j\,(z,\,t)\,dt,$$

ведущей (при обгоне электронов) к расходимостям чисто формального характера, поскольку вполне естественный (с точки зрения уравнений движения) чисто кинематический факт «встречи» двух разных электронов в одной точке не вызывает каких-либо особенностей в наведенных токах, индуцированных зарядах и т. п., тогда как при этом согласно обычной несколько формальной трактовке $j(z,t)\to\infty$.

Наличие сил пространственного заряда между электронами системы не изменяет исходного выражения (2) для н. т. (вследствие линейности уравнений Максвелла); при этом, конечно, закон движения электронов должен быть получен с учетом действия этих сил **.

2. Если электроны выходят из системы в том же порядке, как и входят в нее — один за другим (а внутри системы движутся произвольно),

---

* Формула для н. т. с учетом запаздывания потенциалов была выведена Я. Н. Фельдом [5] и отличается от (1) лишь обычно малым добавочным членом, учитывающим наличие токов смещения в системе.

** Если электроны, влетающие в систему, имеют некоторое распределение по скоростям, заряд $dq = I(\tau)d\tau$ отнюдь не будет «точечным», поскольку траектории разных электронов заряда dq могут быть существенно различными (см. например, [10], где используется это обстоятельство). Тогда выражение (2) будет относиться лишь к электронам, скорости которых при влете в момент τ лежат в некотором интервале от $v_x(\tau)$ до $v_x(\tau) + dv_x$ и т. д. Иными словами, под зарядом $I(\tau)d\tau$ в дальнейшем понимается точечный заряд, соответствующий элементу фазового объема $dx\,dy\,dz\,dv_x \cdot dv_y dv_z$ координат и скоростей электронов системы.

то н. т., создаваемый всеми зарядами, находящимися в системе в данный момент t, определится как интеграл

$$I_{\text{н}}(t) = \int_{\tau(t)}^{t} I(\tau')\,\mathbf{v}(\tau', t)\,\mathbf{E}(\tau', t)\,d\tau'. \tag{3}$$

Здесь учтено действие всех электронов, вошедших в систему за время пролета (обозначим его $T(\tau)$) τ-электрона, т. е. от момента его влета τ до момента вылета $t = \tau + T(\tau)$. В (3) нижний предел интегрирования τ следует считать функцией t. Это выражение является основой для ряда расчетов [3—4, 6—8], однако, если имеется отсев электронов или обгон их при выходе из системы, что часто и бывает *, формула (3) становится несправедливой, так как при некотором $t = \tau + T(\tau)$ в системе уже может не быть некоторых электронов, влетевших позже τ, и, напротив, могут еще оставаться электроны, поступившие раньше τ. Теперь вместо (3) следовало бы писать

$$I_{\text{н}}(t) = \sum_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(\tau', t)\,d\tau' \tag{4}$$

($\Phi(\tau', t)$ означает подынтегральное выражение в (3)). Здесь суммирование нужно вести только по таким интервалам $[\tau_i(t),\ \tau_{i+1}(t)]$ времени влета электронов, которые соответствуют электронам, находящимся в системе в данный момент t, что практически затруднительно даже в простейших случаях. В последующих двух параграфах показано, каким образом эта трудность может быть обойдена.

2. ГАРМОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НАВЕДЕННОГО ТОКА

1. Остановимся сначала на случае, когда н. т. является периодической функцией времени и может быть представлен рядом Фурье

$$I_{\text{н}}(t) = \frac{I_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (I_{1k} \sin k\omega t + I_{2k} \cos k\omega t). \tag{5}$$

Это возможно, естественно, лишь тогда, если существует такой интервал времени $T_0 = 2\pi/\omega$, через который мгновенная картина распределения зарядов в системе по положениям и скоростям полностью повторяется. Нетрудно видеть, что для этого в (2) должно выполняться условие

$$I_{\text{н}}^{dq}(\tau + T_0,\ t + T_0) = I_{\text{н}}^{dq}(\tau,\ t). \tag{6}$$

Подчеркнем, что условие (6) может удовлетворяться и при *непериодическом движении частиц*, например при вводе немодулированного пучка в систему, где имеется произвольное периодическое во времени электромагнитное поле.

Часто наибольший интерес представляет именно вычисление гармоник (обычно первых) н. т.

Если при выходе электронов из системы нет обгона, то, считая, например, н. т. периодической функцией времени влета** электронов τ (что ча-

* Как, например, в монотроне и генераторе с тормозящим полем (см. далее §4) и особенно в приборах, где полезный эффект обеспечивается отсевом «вредных» электронов из пространства взаимодействия на окружающие электроды (см., например, [14]).

** В этом случае интеграл (3) должен быть записан так: $I_{\text{н}}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} I(\tau') \times$ $\times \mathbf{v}(\tau', \tau+T(\tau))\,\mathbf{E}(\tau', \tau+T(\tau))\,d\tau' = \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} \Phi[\tau', \tau+T(\tau)]\,d\tau'.$

сто удобнее), из (3) получим

$$\begin{matrix} I_{1k} \\ I_{2k} \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} k\omega t\, d\omega t \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} \Phi[\tau', \tau + T(\tau)]\, d\tau'. \qquad (7)$$

Здесь $\sin k\omega t$ относится к I_{1k} и $\cos k\omega t$ — к I_{2k}.

2. Если же обгон на границе системы имеет место, то, идя таким же путем, мы должны использовать выражение (4), что очень сложно. Для вывода формул, справедливых в общем случае, рассмотрим систему в некоторый момент t_1 и определим н. т., создаваемый только точечным зарядом $dq_1 = I(\tau_1)\, d\tau_1$, влетевшим в систему как раз при t_1 ($\tau_1 = t_1$), а также равными ему точечными зарядами $dq_2, dq_3, \ldots, dq_n$, попавшими в систему при $\tau_2 = \tau_1 - T_0$, $\tau_3 = \tau_1 - 2T_0, \ldots, \tau_n = \tau_1 - (n-1)\, T_0$ (T_0 — период процесса; см. рис. 1, где показаны *1*, *2*, ..., *n*-й заряды и граница системы). Считаем, что $(n+1)$-й заряд, попавший в систему при $\tau_{n+1} = \tau_1 - nT_0$, уже вышел из нее и тока не наводит. Создаваемый выбранной дискретной последовательностью зарядов dq_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) н. т. есть периодическая функция t, так как через период T_0 картина распределения зарядов в системе повторится, только номера зарядов на рис. 1 сместятся на единицу (n-й заряд выйдет из системы и т. д.). Поэтому н. т. $i_н$, создаваемый зарядами dq_i, можно представить рядом Фурье:

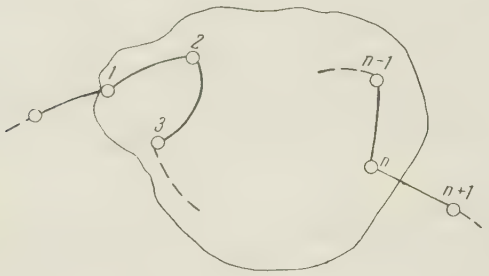


Рис. 1

$$i_н = \frac{i_{20}(\tau_1)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [i_{1k}(\tau_1) \sin k\omega t + i_{2k}(\tau_1) \cos k\omega t], \qquad (8)$$

где

$$\begin{matrix} i_{1k} \\ i_{2k} \end{matrix} = \sum_{i=1}^{n} I(\tau_i)\, d\tau_i \frac{2}{T_0} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T_0} \mathbf{E}(\tau_i, t')\, \mathbf{v}(\tau_i, t') \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} k\omega t'\, dt'. \qquad (9)$$

Однако поскольку через период T_0 первый заряд dq_1 займет положение второго заряда dq_2, интегрирование во втором члене суммы (9) ($i = 2$) в интервале $[\tau_1, \tau_1 + T_0]$ эквивалентно интегрированию для dq_1 в интервале $[\tau_1 + T_0, \tau_1 + 2T_0]$ и т. д. для $i = 3, 4, \ldots, n-1$. Наконец, интегрирование для dq_n ($i = n$) эквивалентно интегрированию для dq_1 в интервале $[\tau_1 + (n-1)\, T_0, \tau_1 + nT_0]$, который мы разобьем на два интервала $[\tau_1 + (n-1)\, T_0, \tau_1 + T(\tau_1)]$ и $[\tau_1 + T(\tau_1), \tau_1 + nT_0]$, причем интегрирование во втором интервале дает нуль, поскольку электрон, вышедший из системы, тока в ней не наводит. Итак, вместо (9), можно записать *

$$\begin{matrix} i_{1k} \\ i_{2k} \end{matrix} = I(\tau_1)\, d\tau_1 \frac{1}{T_0} \int_{\tau_1}^{\tau_1+T(\tau_1)} \mathbf{E}(\tau_1, t')\, \mathbf{v}(\tau_1, t') \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} k\omega t'\, dt'. \qquad (10)$$

Теперь, учитывая действие всех зарядов в системе, просуммируем наведенные токи, создаваемые всеми последовательностями зарядов в

* Дальнейший анализ выражения (10) см. в Дополнении.

данный момент t (т. е. всеми последовательностями, относящимися к произвольному τ и $\tau - T_0$, $\tau - 2T_0, \ldots$). В результате получим ряд (5), коэффициенты которого $I_{1,2k}$ теперь выразятся так*:

$$\begin{matrix} I_{1k} \\ I_{2k} \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I(\tau)\, d\omega\tau \int_{\tau}^{\tau + T(\tau)} \mathbf{E}(\tau, t')\, \mathbf{v}(\tau, t') \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} k\omega t'\, dt'. \tag{11}$$

Это выражение можно записать и в несколько другом виде, именно:

$$\begin{matrix} I_{1k} \\ I_{2k} \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I(\tau)\, d\omega\tau \int_A^B \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} k\omega t(\tau, x, y, z)\, \mathbf{E}\, ds, \tag{12}$$

где ds — элемент пути ($ds = \mathbf{v}(\tau, t)\, dt$) τ-электрона, находящегося в момент t в точке x, y, z ($t = t(\tau, x, y, z)$), а A и B — начальная и конечная точки его траектории. Положение точек A и B, как и сама траектория электрона, конечно, зависят в общем случае от τ.

Последнее выражение имеет определенный физический смысл: амплитуда гармоник н. т. $I_{1,2k}$ есть разность потенциалов в статическом поле $\mathbf{E}$, проходимая τ-зарядом в системе («калиброванная» на множитель $\sin k\omega t$ или $\cos k\omega t$) и усредненная за период по всем τ-зарядам. Таким образом, действие всех частиц системы выражается через усредненные действия отдельных частиц за время их прохождения в системе.

3. Рассмотрим один частный случай. Допустим, что электроны движутся по произвольным (различным) траекториям, но начальные (при $t = \tau$) и конечные (при $t = \tau + T(\tau)$) точки траекторий A и B одинаковы для всех электронов в системе. В этом случае для постоянной составляющей н. т. $I_{20}/2$ (т. е. для I_{2k} при $k = 0$) внутренний криволинейный интеграл выражения (12) не зависит от формы пути, т. е. в данном случае от τ, и из (12) получим

$$\frac{I_{20}}{2} = \bar{I}\,(U'_A - U'_B),$$

где $\bar{I}$ — средний ток, поступающий в систему за период T_0,

$$\bar{I} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} I(\tau)\, d\tau;$$

U'_A и U'_B — потенциалы, создаваемые полем $\mathbf{E}(x, y, z)$ в точках A и B (если электроны проходят путь от какого-либо проводника до того, в котором определяется н. т., то, согласно условию теоремы Рамо — Шокли, $U'_A - U'_B = -1$).

Таким образом, в рассматриваемом случае детекторный эффект, т. е. зависимость постоянной составляющей н. т. от внешних условий (от переменных полей, определяющих закон движения зарядов), принципиально отсутствует**. Если, в частности, точки A и B совпадают, что имеет

---

* Если заряды могут несколько раз входить в систему и выходить из нее, что имеет место, например, в отражательном клистроне, то внутренний интеграл выражения (11) следует записать как сумму соответствующих интегралов, относящуюся к полному времени пребывания электронов в системе.

** При приближенном исследовании электроники плоского диода ([4], стр. 172; учитывались члены до четвертой степени малого параметра) на этот факт обратил внимание С. Д. Гвоздовер. Проведенное рассмотрение строго доказывает и обобщает сделанное в [4] предположение.

место, например, в некоторых системах с тормозящими полями, то $I_{20} = 0$.

Если же, в еще более частном случае, все электроны движутся по некоторой неизменной траектории S и проходят по ней одинаковый путь L, то внутренний интеграл выражения (12) не зависит от τ при любых k. Поэтому, изменяя в (12) порядок интегрирования, можно записать

$$\begin{matrix} I_{1k} \\ I_{2k} \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^L E_s(s)\, ds \int_0^{2\pi} I(\tau) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} k\omega t(s, \tau)\, d\omega\tau, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{13}$$

(s — текущая длина пути, E_s — касательная составляющая напряженности поля), откуда в простейшем случае плоского однородного конденсаторного пространства получим формулы, совпадающие с формулами (2.36) и (2.37), приведенными для этого случая в [3] для первой гармоники н. т., а также (без доказательства) с формулами монографии [7].

3. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ ЗАРЯДА И ТОКА

Вернемся к произвольной зависимости всех величин формулы (2) от τ и t, когда условие (6) может и не выполняться. Ввиду того, что последующие рассуждения применимы не только к наведенным токам, но и к наведенным зарядам и вообще к любым аддитивным действиям, вызываемым произвольно движущимися частицами, формулу (2) запишем следующим образом. Действие (н. т.) от группы частиц, влетающих в систему в момент τ, обозначим как $d(\tau, t)$; по смыслу задачи оно равно нулю, если эта τ-частица находится вне пределов системы. Для τ-частицы, находящейся в системе, действие обозначим через $g(\tau, t)d\tau$. Таким образом,

$$d(\tau, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < t < \tau, \\ g(\tau, t)\, d\tau & \text{при } \tau \leqslant t \leqslant \tau + T(\tau), \\ 0 & \text{при } \tau + T(\tau) < t < \infty. \end{cases}$$

В случае н. т. (см. формулу (2))

$$d(\tau, t) = I_{\text{н}}^{dq}(t),$$
$$g(\tau, t)\, d\tau = I(\tau)\, d\tau\, \mathbf{v}(\tau, t)\, \mathbf{E}(\tau, t).$$

Представим функцию $d(\tau, t)$ в виде интеграла Фурье, выразив ее, таким образом, в виде аналитической функции τ и t, определенной на всем временно́м интервале $[-\infty, \infty]$:

$$d(\tau, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d(\tau, t')\, e^{i\omega(t'-t)}\, dt' = \frac{d\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} g(\tau, t')\, e^{i\omega(t'-t)}\, dt'.$$

Суммарное действие, обозначим его $G(t)$ (суммарный н. т.), выразится как интеграл от написанного выражения по всем τ*, т. е.

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, d\omega \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} g(\tau, t')\, e^{i\omega t'} dt'. \tag{14}$$

Это и есть общее выражение, справедливое для всех случаев.

* Интервал интегрирования по τ можно, конечно, всегда полагать равным $[-\infty, t]$, так как в системе не может быть частиц, вошедших в нее позже данного момента t.

Допустим теперь, что G есть непериодическая функция t. Если внутренний интеграл выражения (14) $\int\limits_{\tau}^{\tau+T(\tau)} g(\tau, t') e^{i\omega t'} dt'$ — достаточно хорошо убывающая на бесконечности функция τ, то в формуле (14) можно переменить порядок интегрирования по τ и ω, т. е.

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{\tau}^{\tau+T(\tau)} g(\tau, t') e^{i\omega t'} dt'.$$

Но это выражение дает представление $G(t)$ в виде интеграла Фурье

$$G(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_\omega e^{-i\omega t}, \quad g_\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{\tau}^{\tau+T(\tau)} g(\tau, t') e^{i\omega t'} dt',$$

для компонент Фурье которого g_ω получено, таким образом, простое аналитическое выражение. Отсюда следует, что при разложении н. т. в интеграл Фурье (при записи в действительной форме) будем иметь

$$I_{\text{н}}(t) = \int\limits_{0}^{\infty} [I_{1\omega} \sin \omega t + I_{2\omega} \cos \omega t] d\omega, \tag{15}$$

где

$$\begin{matrix} I_{1\omega} \\ I_{2\omega} \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\tau) d\tau \int\limits_{\tau}^{\tau+T(\tau)} \mathbf{E}(\tau, t') \mathbf{v}(\tau, t') \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \omega t' dt'. \tag{16}$$

Здесь непосредственно видно сходство между амплитудами гармоник наведенного тока при разложении последнего в интеграл или ряд Фурье (ср. (16) с выражением (11)). В частности, все сказанное в конце § 2 о компонентах $I_{1,2k}$ справедливо и для компонент Фурье $I_{1,2\omega}$.

Выражение (14), являясь общим, описывает, конечно, и случай периодической зависимости G от времени, сводясь в этом случае к ряду, подобному ряду типа (5) с коэффициентами (11), полученному выше несколько искусственным способом. Проводя рассуждения как и в § 2, найдем

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t},$$

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} d\tau \int\limits_{\tau}^{\tau+T(\tau)} g(\tau, t') e^{-ik\omega t'} dt'. \tag{14а}$$

Из формулы (14) этот ряд может быть получен лишь с привлечением обобщенных функций, чем мы здесь заниматься не будем. Легко, впрочем, показать, что обратно, при стремлении интервала периодичности T_0 в (14а) к бесконечности (и при достаточно быстром убывании соответствующих величин с ростом $|\tau|$) ряд Фурье (14а) переходит в интеграл Фурье (14), чего и следовало ожидать.

Остановимся на вычислении плотностей заряда ρ и конвекционного тока $\mathbf{j}$, для чего используем формулу (14а) (ρ и $\mathbf{j}$ считаем периодическими функциями t). В данном случае «действие» $g(\tau, t)$ заряда $dq = I(\tau) d\tau$, пролетающего по некоторой траектории в момент $t = t_M(\tau)$ через точку M, есть плотность этого заряда $\rho(\tau)$ и плотность тока $\mathbf{j} = \rho(\tau, t_M) \mathbf{v}(\tau, t_M)$ в течение бесконечно малого интервала времени dt_M («размер» заряда dq/скорость заряда в точке M) $v(\tau) d\tau / v(\tau, t_M)$.

В точку M прибывают в общем случае движения только заряды, попадающие в систему при $t=\tau$, $\tau-T_0$, $\tau-2T_0$.... Они создают плотность заряда ρ_M^{Π} и плотность тока $\mathbf{j}_M^{\Pi}$:

$$\rho_M^{\Pi}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k^{\Pi}e^{ik\omega t};\quad \rho_k^{\Pi}=\frac{d\tau}{T_0}\rho(\tau)\frac{v(\tau)}{v(\tau,\,t_M)}e^{-ik\omega t_M}\qquad (\text{при } v(\tau,\,t_{\text{м}})\neq 0),$$

$$\mathbf{j}_M^{\Pi}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{j}_k^{\Pi}e^{ik\omega t};\quad \mathbf{j}_k^{\Pi}=\frac{d\tau}{T_0}j(\tau)\frac{\mathbf{v}(\tau,\,t_M)}{v(\tau,\,t_M)}e^{-ik\omega t_M}.$$

При одномерном движении вдоль оси z можно просуммировать вклады всех τ-последовательностей в данной точке z. Тогда для амплитуд гармоник плотностей заряда (ρ_k) и тока (j_k) найдем

$$\rho_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho(\tau)\left|\frac{v(\tau)}{v(\tau,\,t)}\right|e^{-ik\omega t}d\omega\tau;\quad j_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|j(\tau)|\frac{v(\tau,\,t)}{|v(\tau,t)|}e^{-ik\omega t}d\omega\tau.$$

Здесь $t=t(\tau,\,z)$.

Полученные формулы удобно использовать для расчета возбуждения волноведущих систем заданными источниками поля. Частично — при исследовании некоторых конкретных систем — эти результаты были получены ранее [15,16] *.

4. НАВЕДЕННЫЙ ТОК В ПЛОСКОМ ДИОДНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Для иллюстрации изложенного проведем анализ двух систем — генератора с тормозящим полем (ГТП), нашедшего успешное применение в качестве генераторов и умножителей частоты сантиметрового и миллиметрового диапазонов [11, 12], и монотрона — основного элемента ряда СВЧ-приборов [3,4,6—8], для которого интересующий нас случай сильной группировки электронов изучен недостаточно подробно или неправильно.

Несмотря на существенное различие траекторий электронов в названных приборах, последние, с точки зрения «внешней цепи», ведут себя, как будет показано ниже, совершенно аналогично, с тем, однако, отличием, что ГТП является значительно более эффективным устройством, чем монотрон. Чтобы подчеркнуть сходство характеристик ГТП и монотрона, в обоих случаях будем использовать одинаковые обозначения, причем величины, относящиеся к монотрону, будем снабжать штрихами.

Уравнения движения электронов (взаимодействия электронов друг с другом мы не учитываем) в рассматриваемых системах имеют вид

$$\ddot{mz}=-\frac{eV_1}{d}+\frac{eV_m}{d}\sin\omega t\ (\text{ГТП});\qquad \ddot{mz}=\frac{eV_m}{d}\sin\omega t\ (\text{монотрон})$$

с начальными условиями $z|_{t=\tau}=0$; $z|_{t=\tau}=v_0=2\sqrt{2\frac{e}{m}V_0}$

(обозначения приведены на рис. 2 и 3).

---

* В работе [16], посвященной возбуждению волновода электронным пучком с периодически изменяющимися траекториями, в отличие от нашего подхода, принимается, что по мере движения элементарный заряд dq может частично изменять свой объем. Поэтому в выражение для $\mathbf{j}_z^{\Pi}$ входит якобиан преобразования $D=\partial[x(x_0,y_0,z,\tau),y(x_0,y_0,z,\tau)]/\partial(x_0,y_0)$ ($x_0,y_0,z_0,=0$ — точка вылета τ-заряда). Однако в окончательных выражениях для полей (после интегрирования по всем источникам $(x_0y_0))D$ не фигурирует.

Интегрирование уравнения движения для ГТП дает

$$v = \ddot{z} = v_0 [1 + \mu (\cos \omega\tau - \cos \omega t)] - \left\{\frac{2v_0}{\beta_0} (\omega t - \omega\tau)\right\},$$

$$z = \frac{v_0}{\omega} \left(\omega t - \omega\tau + \mu [(\omega t - \omega\tau) \cos \omega\tau - \sin \omega t + \sin \omega\tau]\right) - \left\{\frac{v_0}{\omega\beta_0} (\omega t - \omega\tau)^2\right\}. \quad (17)$$

Для монотрона получим такие же выражения, но без членов в фигурных скобках.

В выражении (17) коэффициент модуляции

$$\mu = \frac{V_m}{2V_0\beta_0'}, \qquad \beta_0' = \frac{\omega d}{v_0}, \qquad \beta_0 = \frac{2m\omega d v_0}{eV_1}$$

(β_0 и β_0' — статические углы пролета электронов в ГТП и монотроне).

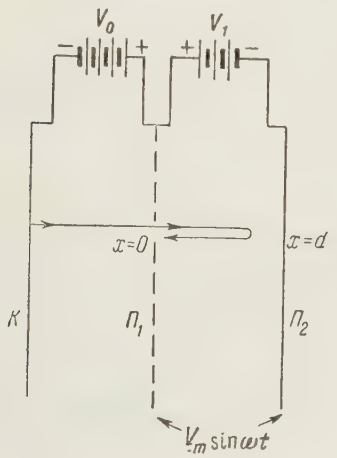


Рис. 2

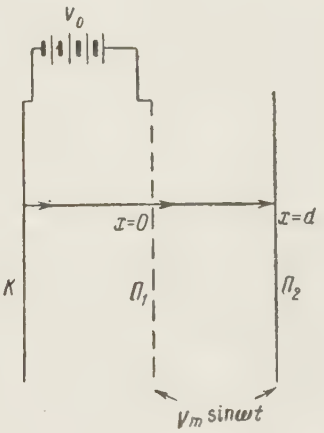


Рис. 3

Рис. 2. Схематическое изображение генератора с тормозящим полем:

K — катод; $П_1$ — сетка; $П_2$ — отражательная пластина

Рис. 3. Схематическое изображение монотрона:

K — катод; $П_1$ — сетка; $П_2$ — коллектор

Будем считать коэффициент μ достаточно малым ($\mu < 1$), а углы пролета β_0 и β_0' — большими (близкими к оптимальным или больше оптимальных, β_0, $\beta_0' \geqslant 1$. оптимальными считаем такие условия, при которых электронный кпд имеет наибольшую величину).

Полагая в (17) $z = 0$, а в подобном уравнении для монотрона $z = d$, найдем углы пролета ωT и $\omega T'$ электронов в системе как функцию времени влета τ (считая ωT, $\omega T' \gg 1$):

$$\omega T = \beta_0 + 2h \cos \omega\tau, \quad \omega T' = \frac{\beta_0'}{1 + \mu \cos \omega\tau} \simeq \beta_0' - 2h' \cos \omega\tau, \qquad (18)$$

где h и h' — безразмерные параметры, характеризующие отношение напряженностей высокочастотного и электростатического полей:

$$h = \frac{\mu\beta_0}{2} = \frac{V_m}{V_1}; \quad h' = \frac{\mu\beta_0'}{2} = \frac{V_m}{4V_0} \quad \left(\frac{h}{\beta_0} \ll 1, \frac{h'}{\beta_0'} \ll 1\right).$$

Выражения (18) и все последующие выводы справедливы, естественно, лишь для не очень больших ВЧ-полей, когда все электроны в ГТП уходят из системы через плоскость Π_1 (рис. 2), а все электроны в монотроне — через плоскость Π_2 * (рис. 3).

Из формулы (11) после простых, но довольно громоздких вычислений получим следующие выражения для амплитуд гармоник наведенного тока.

Генератор с тормозящим полем

$$I_{11} = -\frac{8V_0}{\beta_0 V_1} I_0 \Big[J_1(2h)\sin\beta_0 - \frac{h}{\beta_0} - \frac{h}{\beta_0} R_{02}(2h)\cos\beta_0 + \frac{2}{\beta_0} J_1(2h)\cos\beta_0 + \frac{h}{2\beta_0} J_2(4h)\cos 2\beta_0 \Big], \tag{19}$$

$$I_{21} = -\frac{8V_0}{\beta_0 V_1} I_0 \Big[J_1(2h)\cos\beta_0 + h + \frac{h}{\beta_0} R_{02}(2h)\sin\beta_0 - \frac{2}{\beta_0} J_1(2h)\sin\beta_0 - \frac{h}{2\beta_0} J_2(4h)\sin 2\beta_0 \Big],$$

$$\begin{matrix} I_{1k} \\ I_{2k} \end{matrix} = \pm\frac{8V_0}{\beta_0 V_1} I_0 \Big[\sum_\nu \frac{1}{\nu} \lambda_\nu J_\nu(2h\nu) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \beta_\nu \pm \frac{h}{\beta_0 k} R_{lm}(2hk) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \beta_k \mp \mp \frac{2}{\beta_0 k^2} J_k(2hk) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \beta_k \Big]. \tag{20}$$

Монотрон

$$I'_{11} = -\frac{2I_0}{\beta'_0}\Big[J_1(2h')\sin\beta'_0 - \frac{h'}{\beta'_0} + \frac{h'}{\beta'_0} R_{02}(2h')\cos\beta'_0 + \frac{h'}{2\beta'_0} J_2(4h')\cos 2\beta'_0 \Big], \tag{21}$$

$$I'_{21} = -\frac{2I_0}{\beta'_0}\Big[J_1(2h')\cos\beta'_0 + h' - \frac{h'}{\beta'_0} R_{02}(2h')\sin\beta'_0 - \frac{h'}{2\beta'_0} J_2(4h')\sin 2\beta'_0 \Big],$$

$$\begin{matrix} I'_{1k} \\ I'_{2k} \end{matrix} = \pm\frac{2I_0}{\beta'_0}(-1)^{k+1}\Big[\sum_\nu \frac{1}{\nu} \lambda'_\nu J_\nu(2h'\nu) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \beta'_\nu \mp \frac{h'}{\beta'_0 k} R_{lm}(2h'k) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \beta'_k \Big]. \tag{22}$$

В выражениях (20) и (22) суммирование ведется по трем числам ν, $\nu = l, k, m$, причем l и m отличаются от k на единицу: $l = k-1$, $m = k+1$; $k = 2, 3, \ldots$, $R_{ij} = J_i - J_j$ (J_n — функция Бесселя n-го порядка); $\beta_\nu = \nu\left(\beta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$; $\beta'_\nu = \nu\left(\beta'_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

Коэффициенты λ_ν, λ'_ν определяются так:

$$\lambda_\nu = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = k, \\ \dfrac{h}{\beta_0} & \text{при } \nu = l, m, \end{cases} \qquad \lambda'_\nu = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = k, \\ \dfrac{h'}{\beta'_0} & \text{при } \nu = l, m. \end{cases}$$

Используя выражения для активных составляющих первых гармоник н. т., из (19) и (21) нетрудно найти электронный кпд **.

$$\eta = -\frac{1}{2}\frac{V_m I_{11}}{I_0 V_0}, \quad \eta' = -\frac{1}{2}\frac{V_m I'_{11}}{I_0 V_0}.$$

---

* В монотроне это имеет место до значений μ порядка 0,8 (при $0{,}5 < \mu < 0{,}8$ некоторые электроны пересекают плоскость Π_2 лишь после нескольких смен направления движения); при $\mu > 0{,}8$ некоторые электроны «отражаются» от ВЧ-поля и условие $x = d$ не может быть для них выполнено [6].

** В [6] в рассматриваемом случае больших углов пролета для монотрона получены подобные выражения, однако там в качестве исходного было взято выражение типа (7), несправедливое при наличии обгона электронов.

При $h,\ h' \to 0$ выражения для кпд и первых гармоник н. т. в обеих системах, как нетрудно убедиться, совпадают.

Напомним, что постоянная составляющая н. т. в монотроне равна I_0, а в ГТП — нулю (см. конец § 2).

Учитывая малость h/β_0 и h'/β'_0 по сравнению с единицей, упростим полученные выражения для кпд и гармоник н. т. и сведем результаты в таблицу. При этом вместо первой гармоники н. т. запишем выражения для активной $G_e\,(G'_e)$ и реактивной $B_e\,(B'_e)$ составляющих комплексной проводимости электронного пучка, $G_e = \overrightarrow{I_{11}}/V_m$, $B_e = I_{21}/V_m$ (в таблице обозначено $Z_0 = V_0/I_0$).

Таблица

Параметры приборов	Генератор с тормозящим полем	Монотрон
Электронный кпд	$\eta = \frac{4h}{\beta_0^2}\left[J_1(2h) \times \right.$ $\left. \times (\beta_0 \sin\beta_0 + 2\cos\beta_0) - h\right]$	$\eta' = \frac{4h'}{\beta_0'^2}\left[J_1(2h')\ \beta'_0 \sin\beta'_0 - h'\right]$
Активная проводимость пучка	$G_e = -Z_0 \frac{4V_0}{V_1\beta_0^2}\left[\frac{J_1(2h)}{2h} \times \right.$ $\left. \times (\beta_0 \sin\beta_0 + 2\cos\beta_0) - \frac{1}{2}\right]$	$G'_e = -Z_0 \frac{1}{\beta_0'^2}\left[\frac{J_1(2h')}{2h'} \times \right.$ $\left. \times \beta'_0 \sin\beta'_0 - \frac{1}{2}\right]$
Реактивная проводимость пучка	$B_e = -Z_0 \frac{4V_0}{V_1\beta_0^2}\left[\frac{J_1(2h)}{2h} \times \right.$ $\left. \times (\cos\beta_0 - \frac{2}{\beta_0}\sin\beta_0) + \frac{1}{2}\right]$	$B'_e = -Z'_0 \frac{1}{\beta_0'^2} \times$ $\times\left[\frac{J_1(2h')}{2h'}\cos\beta'_0 + \frac{1}{2}\right]$
Амплитуды высших активных гармоник н. т. $(k = 2, 3, \ldots)$	$I_{1k} = 2I_0 \frac{4V_0}{V_1} \frac{\cos k\left(\beta_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{k\beta_0} \times$ $\times J_k(2hk)$	$I'_{1k} = 2I_0(-1)^{k+1} \times$ $\times \frac{\cos k\left(\beta'_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{k\beta'_0} J_k(2h'k)$
Амплитуды высших реактивных гармоник н. т. $(k = 2, 3, \ldots)$	$I_{2k} = -2I_0 \frac{4V_0}{V_1} \times$ $\times \frac{\sin k\left(\beta_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{k\beta_0} J_k(2hk)$	$I'_{2k} = -2I_0(-1)^{k+1} \times$ $\times \frac{\sin k\left(\beta'_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{k\beta'_0} J_k(2h'k)$

Вычисленные зависимости иллюстрируются приводимыми ниже рис. 4 — 8, в которых сплошные кривые относятся к ГТП, пунктирные — к монотрону и штрих-пунктирные — к асимптотическому случаю $h,\ h' \to 0$.

На рис. 4 показана зависимость электронного кпд η, η' от статического угла пролета электронов в системе β_0, β'_0 для значений h и h', соответствующих максимально достижимым кпд ($\eta = \eta_{\text{опт}}$ и $\eta' = \eta'_{\text{опт}}$ при некоторых оптимальных значениях $\beta_{0\text{опт}}$, $\beta'_{0\text{опт}}$).

Там же приведена зависимость кпд от β_0, β'_0 для асимптотически малых значений h, h'. Как видно, при $h,\ h' \to 0$ названные оптимальные углы пролета в обеих системах совпадают и близки к $2\pi n + \frac{\pi}{2}$, а при больших h, h' несколько отличаются от этой величины.

На рис. 5 приведена зависимость кпд от амплитуды ВЧ-поля для оптимальных значений углов пролета (для ГТП взяты три значения $\beta_{0\text{опт}}$, соответствующие трем последовательным максимумам η рис. 4, а для монотрона — одно значение $\beta'_{0\text{опт}}$, соответствующее первому максимуму кпд). Данные рис. 4 и 5 свидетельствуют об идентичной зависимости кпд углов от пролета β_0, β'_0 и от приведенной амплитуды ВЧ-поля

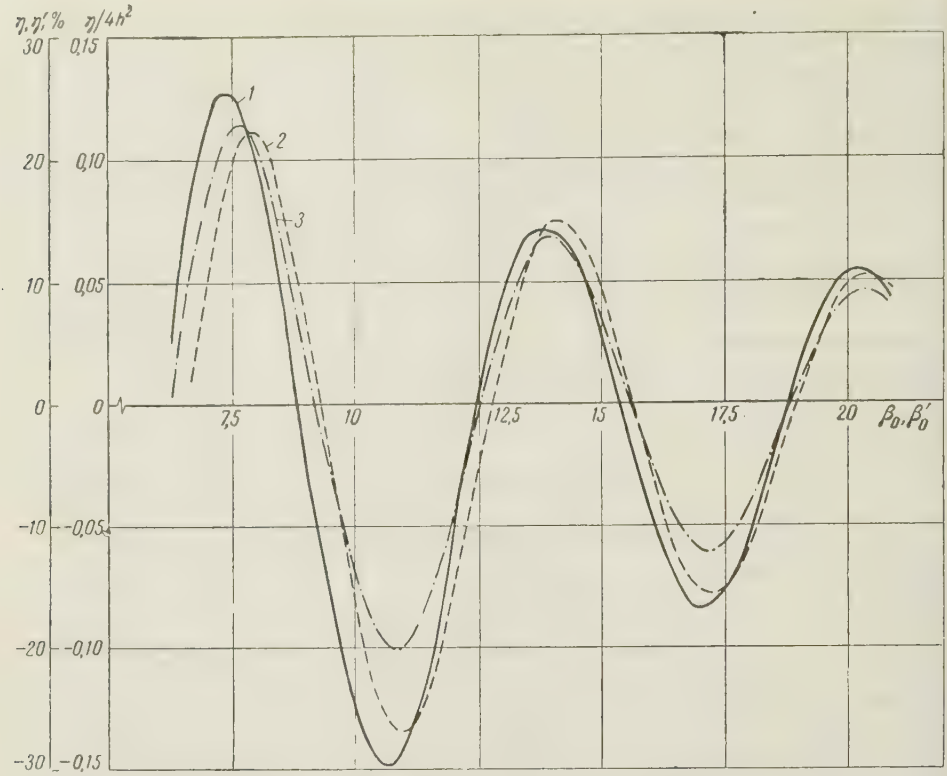
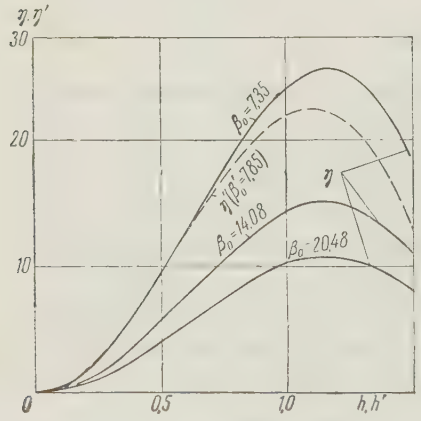


Рис. 4. Электронный кпд ГТП (сплошная кривая) и монотрона (пунктир) как функции угла пролета в системе:

1 — η ($h = 1{,}2$); 2 — η'($h' = 1{,}1$); 3 — $\eta/4h^2 = \eta'/4h'^2$ (при $h,\ h' \to 0$)

h, h' в обеих системах, так же как и о примерно одинаковой величине максимально достижимого кпд* (порядка 22—25%). Однако названное максимальное значение кпд соответствует существенно разным значениям амплитуды ВЧ-поля в ГТП и монотроне. Именно, так как $V_m = hV_1$ (ГТП); $V_m = 4h'V_0$ (монотрон) и $h_{опт} \simeq 1{,}2$; $h'_{опт} \simeq 1{,}1$, то в ГТП $V_{mопт} \simeq 1{,}2V_1$, а в монотроне $V_{mопт} \simeq 4{,}4V_0$!



Таким образом, если в ГТП при оптимальном кпд статическое и ВЧ-поля имеют примерно один порядок величины, то в монотроне при $\eta = \eta_{опт}$ ВЧ-поле должно в 4 раза превышать статическое поле, что делает этот последний случай (в режиме автогенерации) мало реальным.

Рис. 5. Электронный кпд ГТП (сплошная кривая) и монотрона (пунктир) как функции амплитуды ВЧ-поля

Зависимость амплитуд активной и реактивной составляющих первой гармоники н. т., выраженных в безразмерных единицах, от углов про-

* Для монотрона названные зависимости кпд и величина $\eta_{опт}$ примерно совпадают с данными [3], а для ГТП — с данными [11]. Последние для случая больших амплитуд были получены при помощи графического усреднения кинетической энергии отдельных электронов.

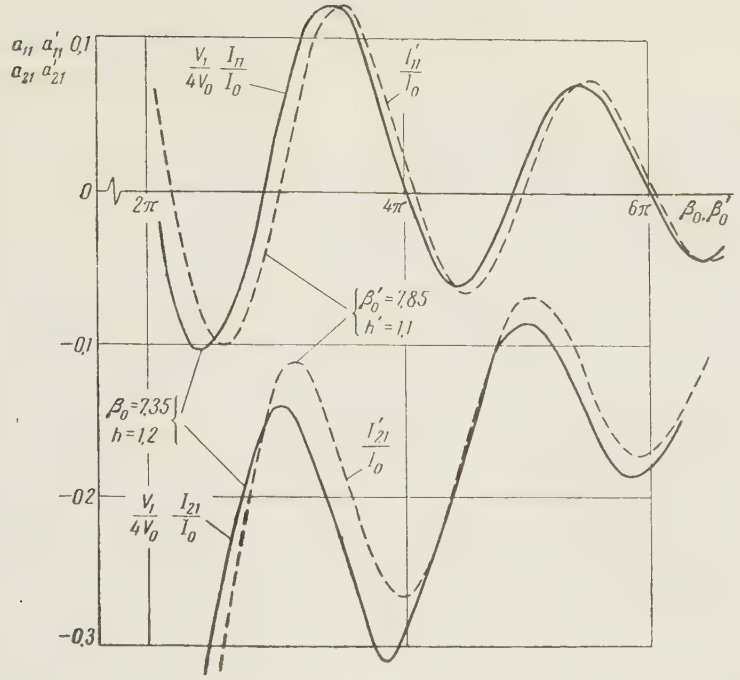


Рис. 6. Зависимость амплитуд активной и реактивной составляющих первой гармоники н. т. от угла пролета в системе:
—ГТП; ——— монотрон

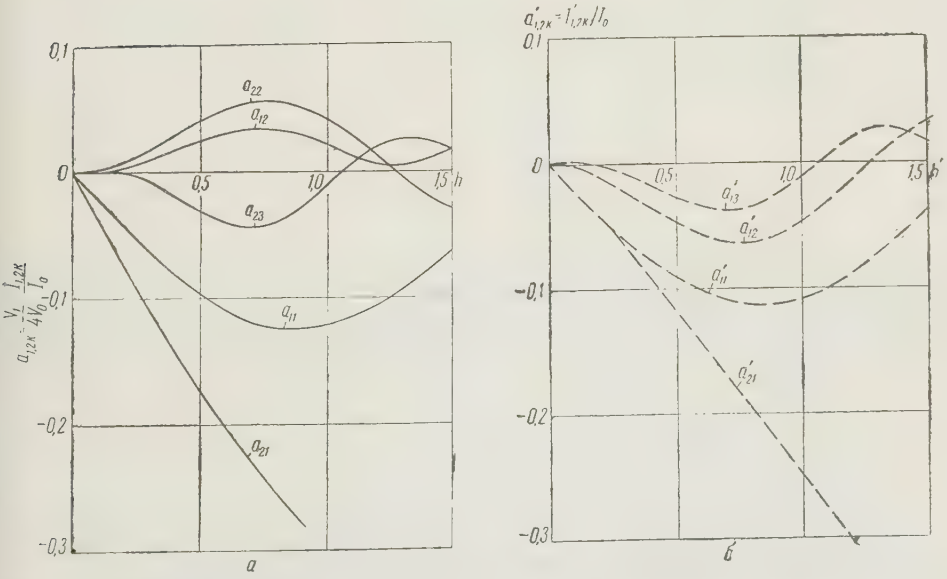


Рис. 7. Амплитуды гармоник н. т. в функции от амплитуды ВЧ-поля (k=1,2,3):
а — случай ГТП (гармоника a_{13} не показана вследствие малости); *б*— случай монотрона (гармоники a'_{22} и a'_{23} не показаны вследствие малости)

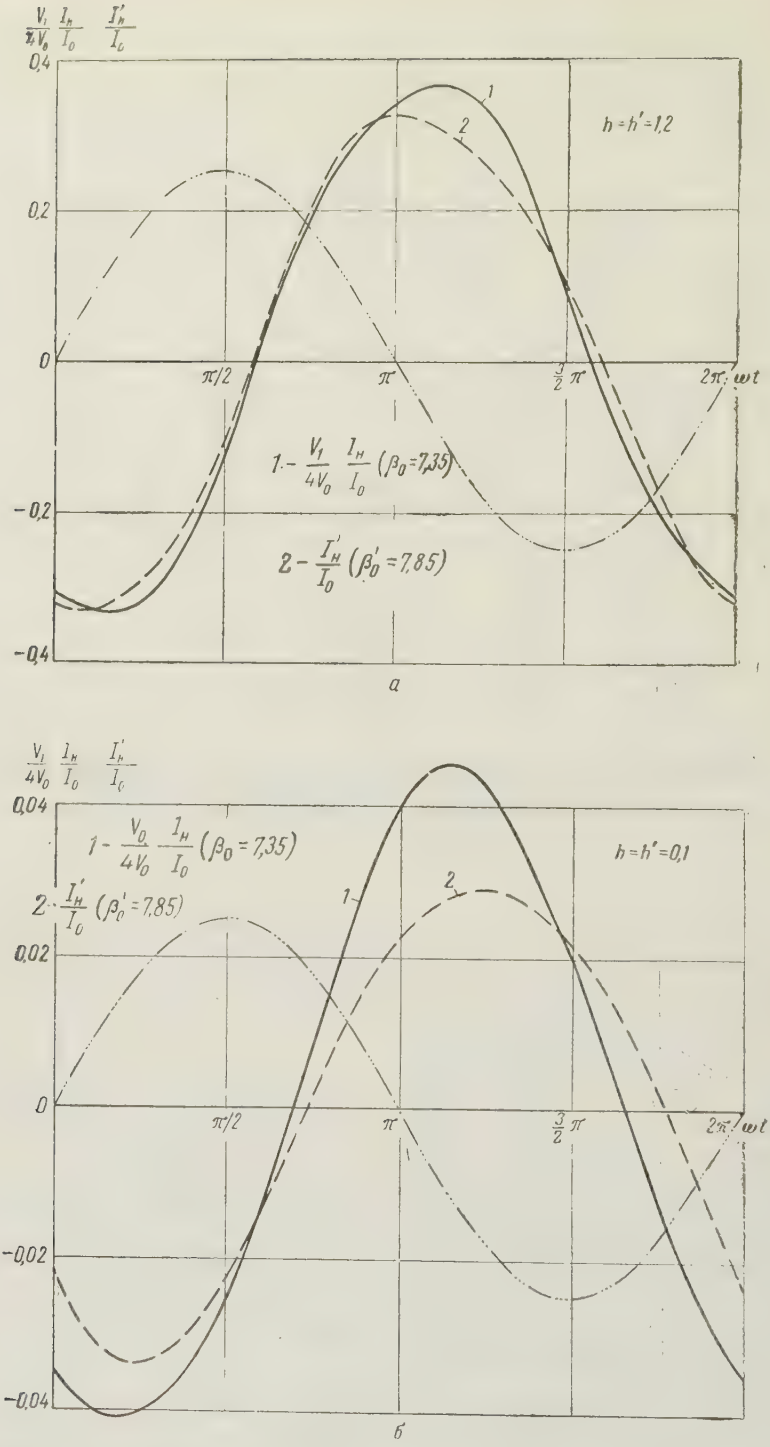


Рис. 8. Зависимости мгновенной величины н. т. от времени (— ГТП; — — — монотрон): $а$ — $h = h' = 1,2$; $б$ — $h = h' = 0,1$

лета иллюстрируются рис. 6 (для оптимальных значений h и h'), а зависимость гармоник н. т. от амплитуды ВЧ-поля при оптимальных углах пролета—рис. 7. Здесь соответственно

$$a_{1k} = \frac{V_1}{4V_0}\frac{I_{1k}}{I_0},\quad a_{2k} = \frac{V_1}{4V_0}\frac{I_{2k}}{I_0} \text{ и } a'_{1k} = \frac{I'_{1k}}{I_0},\quad a'_{2k} = \frac{I'_{2k}}{I_0}\quad (k = 1,2,\ldots).$$

Как видно, реактивная составляющая н. т. превышает активную составляющую (при $\eta \simeq \eta_{\text{опт}}$) более чем в 2 раза.

Временна́я зависимость н. т., полученная в результате суммирования первых трех гармоник ряда (7) ($k = 1, 2, 3$), показана на рис. 8 для случая больших ($h = h' = 1{,}2$) и сравнительно малых ($h = h' = 0{,}1$) амплитуд ВЧ-поля.

На рисунке приведены $\frac{V_1}{4V_0}\frac{I_{\text{н}}}{I_0}$ и $I'_{\text{н}}/I_0$. Там же для сравнения показано синусоидальное ВЧ-напряжение, действующее в системе. В обоих случаях отклонение н. т. от синусоидального не очень велико. При оптимальных кпд амплитуда н. т. достигает в монотроне примерно 30% от I_0 и значительно бо́льшей величины в ГТП, что также свидетельствует о бо́льшей эффективности последней системы.

Выражаю благодарность Е. П. Нестеровой за проведение численных расчетов, а также И. В. Лебедеву за интерес к работе и дискуссию.

Дополнение

Для одного распространенного частного случая установим связь полученных в § 2 выражений для гармоник н. т. с законом движения зарядов в заданном поле.

Пусть уравнение движения для τ-заряда $dq = I(\tau)\,d\tau$ записано в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = I(\tau)\,d\tau V_A\mathbf{F} + \mathbf{f},$$

где $I(\tau)\,d\tau V_A\mathbf{F}$ и $\mathbf{f}$ — соответственно силы статического и ВЧ-полей, действующие на заряд; V_A — постоянный потенциал некоторого проводника A. Допустим, что постоянные потенциалы других проводников равны нулю и что статической составляющей сил пространственного заряда можно пренебречь (т. е. напряженность поля $V_A\mathbf{F}$ определяется для системы без электронов). Тогда при определении интересующего нас н. т. на проводнике A, согласно условию теоремы Рамо—Шокли, фигурирующая в формуле (1) напряженность поля от единичного потенциала будет $\mathbf{E} = \mathbf{F} = \frac{1}{I(\tau)\,d\tau V_A}(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{f})$, а сама формула (1) перепишется так:

$$I^{dq}_{A\text{н}} = \frac{1}{V_A}\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} - \mathcal{E}\right) = \frac{1}{V_A}\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_{\text{кин}} - \mathcal{E}),$$

где $\mathcal{E}_{\text{кин}}(t)$ — кинетическая энергия τ-частицы; $\mathcal{E}(t)$ — изменяющаяся во времени ее полная энергия, равная, по определению, работе сил электрического ВЧ-поля ($d\mathcal{E}/dt = \mathbf{fv}$) [13]. Выражение (10) для амплитуд гармоник н. т., создаваемых последовательностью зарядов, вошедших в систему в моменты τ, $\tau - T_0$, ..., примет теперь вид

$$\begin{Bmatrix} i_{1k} \\ i_{2k} \end{Bmatrix} = \frac{2I(\tau)\,d\tau}{T_0V_A}\int_{\tau}^{\tau+T(\tau)}\left[\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_{\text{кин}} - \mathcal{E})\right]\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} k\omega t\,dt =$$

$$= \frac{2I(\tau)\,d\tau}{T_0V_A}\left[(\mathcal{E}_{\text{кин}} - \mathcal{E})\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} k\omega t\Big|_{t=\tau}^{t=\tau+T(\tau)} \mp k\omega\int_{\tau}^{\tau+T(\tau)}(\mathcal{E}_{\text{кин}} - \mathcal{E})\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\omega t\,dt\right].$$

В ряде задач со многими колебаниями электронов в сравнительно слабом ВЧ-поле (строфотрон [9], генератор Баркгаузена — Курца [14]) полная энергия электронов, в отличие от кинетической энергии, является медленно изменяющейся (по сравнению с периодом T_0) функцией времени. Тогда при $k \neq 0$ в интеграле последнего выражения основной вклад будет вноситься членом $\int_{\tau}^{\tau+T(\tau)}\mathcal{E}_{\text{кин}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\omega t\,dt$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Schockley, J. Appl. Phys., 1938, 3, 635; S. Ramo, Proc. I.R.E., 1939, 27, 584.
2. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд. АН СССР, 1948, стр. 650.
3. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, ГИТТЛ, 1953, гл. 1.
4. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов сверхвысоких частот, ГИТТЛ, 1956.
5. Я. Н. Фельд, Докл. АН СССР, 1953, 93, 3, 447.
6. А. Бекк, Электронные лампы. Теория и конструирование, Изд. Советское радио, 1958.
7. R. Warnecke, P. Guénard, Les tubes électroniques à commande par modulations de vitessé, Paris, 1951.
8. W. Kleen, Einführung in die Mikrowellen Elektronik, 1, Zührich, 1952.
9. B. Agdur, Ericsson Techn., 1957, 13, 1, 1.
10. A. Bronwell, T. Wang, J. Nitz, J. May, H. Wachowski, Proc. I.R.E., 1954, 42, 1117.
11. J. J. Ebers, Proc. I.R.E., 1952, 40, 2, 138.
12. C. J. Carter, W. H. Cornetet, IRE Trans., 1958, ED-5, 3, 139.
13. В. И. Гайдук, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 9, 1513.
14. E. M. Boone, M. Uenohara, D. T. Davis, IRE Trans., 1958, ED-5, 3, 196.
15. A. Nordsieck, Proc. I.R.E, 1953, 41, 5, 630.
16. Г. Н. Рапопорт, Возбуждение волновода электронным пучком с периодически-изменяющимися траекториями, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 4. (Докл. на юбилейной сессии Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова, август, 1959).

Поступила в редакцию
11 V 1959

РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ФОКУСИРУЮЩЕМ УСТРОЙСТВЕ ЛБВ

А. Л. Игрицкий

Предлагается достаточно точный и общий метод для расчета траекторий электронов в фокусирующем устройстве ЛБВ с периодическим магнитным полем. Этот метод позволяет определить конфигурацию электронного пучка в лампе для любых условий входа электронов в периодическое поле.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в ЛБВ широко применяется фокусировка периодическим магнитным полем. Фокусирующее устройство должно обеспечивать возможно лучшее прохождение пучка через длинную спираль на коллектор. В соответствии с этим одной из основных задач расчета фокусирующего устройства должен являться расчет траекторий электронов, так как лишь при знании траекторий можно определить конфигурацию пучка и судить о вероятности попадания электронов на спираль ЛБВ.

В литературе имеется очень мало работ, относящихся к названному вопросу. Следует, в частности, отметить работу [1].

В настоящей статье излагается достаточно точный и общий метод для расчета параксиальных траекторий электронов в фокусирующем устройстве. Электрон может входить в периодическое магнитное поле при любой его фазе, имея произвольные радиальную координату и угол наклона к оси.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Исходное дифференциальное уравнение, описывающее траектории электронов с учетом пространственного заряда при условии, что катод лампы находится в магнитном поле, имеет вид [2]

$$r'' + \frac{\Phi'}{2\Phi} r' + \left\{ \frac{\Phi''}{4\Phi} + \frac{\eta}{8\Phi}\left(B_z^2 - \frac{r_к^4}{r^4} B_{zк}^2 \right) \right\} r = \frac{I}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 \eta^{1/2} \Phi^{3/2} r}. \qquad (1)$$

Здесь r — радиальная координата электрона (принимается, что ось z совпадает с осью симметрии ЛБВ); Φ — распределение потенциала вдоль оси z; штрихи означают производные по координате z; η — отношение заряда электрона к его массе; B_z — распределение аксиальной составляющей индукции магнитного поля вдоль оси z; $r_к$ — радиальная координата крайнего электрона на катоде, траектория которого определяет конфигурацию электронного пучка; $B_{zк}$ — аксиальная составляющая индукции магнитного поля на катоде; I — ток электронного пучка лампы; ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума.

Будем определять конфигурацию электронного пучка в спирали ЛБВ, т. е. когда электроны уже прошли ускоряющее поле пушки. Вследствие этого можно принять $\Phi = \text{const}$ и $\Phi' = \Phi'' = 0$. Предположим, что индукция магнитного поля вдоль оси z меняется по закону синуса

$$B_z = B_{z0} \sin \frac{2\pi}{L} z, \qquad (2)$$

где B_{z0} — амплитуда периодического магнитного поля; L — его период.

Дифференциальное уравнение (1) является нелинейным. Мы линеаризуем его, рассматривая малые изменения радиуса пучка около некоторого значения $r_0 = \text{const}$, т. е.

$$r = r_0 (1 + \delta), \tag{3}$$

где $\delta \ll 1$. Вследствие малости δ при разложении в ряд будем пренебрегать всеми степенями δ выше первой. Производя в уравнении (1) замену независимой переменной посредством подстановки

$$t = \frac{2\pi}{L} z, \tag{4}$$

после несложных алгебраических преобразований получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + (a - 2q \cos 2t)\, \delta = f(t), \tag{5}$$

где

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{\lambda_p}\right)^2 \left[\frac{B_{z0}^2}{2B_b^2} + \alpha^2 + 3\alpha^4 \frac{B_{z\text{к}}^2}{B_b^2}\right], \tag{6}$$

$$2q = \left(\frac{L}{\lambda_p}\right)^2 \frac{B_{z0}^2}{4B_b^2}, \tag{7}$$

$$f(t) = -(b - 2q \cos 2t), \tag{8}$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{\lambda_p}\right)^2 \left[\frac{B_{z0}^2}{2B_b^2} - \alpha^2 - \alpha^4 \frac{B_{z\text{к}}^2}{B_b^2}\right], \tag{9}$$

$$B_b^2 = \frac{\sqrt{2I}}{\pi\varepsilon_0 \eta^{3/2} \Phi^{1/2} r_{\text{к}}^2}, \tag{10}$$

$$\lambda_p = \frac{4\pi\sqrt{\Phi}}{\sqrt{\eta} B_b}, \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{r_{\text{к}}}{r_0}. \tag{12}$$

Уравнение (5) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение Матье [3].

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ

Решение уравнения (5) может быть произведено методом вариации произвольных постоянных. Пусть при $z = z_0$ и $t_0 = \frac{2\pi}{L} z_0$

$$\delta = \delta_0, \qquad \delta' = \frac{d\delta}{dt} = \delta_0'.$$

При этих граничных условиях общее решение уравнения (5) может быть представлено в виде

$$\delta(t) = \frac{1}{c^2}\{\delta_0'[\delta_1(t_0)\,\delta_2(t) - \delta_2(t_0)\,\delta_1(t)] + \delta_0[\delta_2'(t_0)\,\delta_1(t) - \delta_1'(t_0)\,\delta_2(t)] -$$

$$- \delta_1(t) \int_{t_0}^{t} f(t)\,\delta_2(t)\,dt + \delta_2(t) \int_{t_0}^{t} f(t)\,\delta_1(t)\,dt\}. \tag{13}$$

Здесь постоянный коэффициент

$$c^2 = \delta_2'(t)\,\delta_1(t) - \delta_1'(t)\delta_2(t); \tag{14}$$

$\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ являются двумя частными решениями однородного уравнения Матье

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + (a - 2q\cos 2t)\,\delta = 0. \tag{15}$$

Как известно из теории [3], уравнение Матье (15) может иметь устойчивое или неустойчивое решение. Определение характера решения производится при помощи диаграммы устойчивости, показанной на рис. 1. Если заданным значениям a и q на диаграмме устойчивости соответствует точка в устойчивой незаштрихованной области, то решение уравнения (15) будет стабильным и выражения для $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ могут быть записаны в виде

$$\delta_1(t) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} c_{2r+n}\cos[(2r+n+\beta)\,t], \tag{16}$$

$$\delta_2(t) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} c_{2r+n}\sin[(2r+n+\beta)\,t]. \tag{17}$$

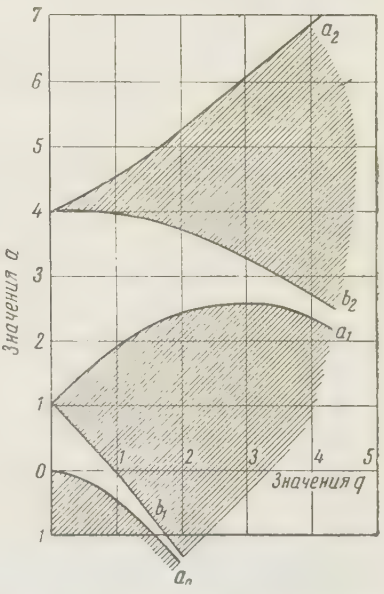


Рис. 1. Диаграмма устойчивости для функций Матье

Здесь n — номер зоны, которой соответствует движение электронов пучка (n определяется из диаграммы, показанной на рис. 1); β — постоянный коэффициент, $0 < \beta < 1$, может быть определен по формуле [3]

$$\beta \simeq \left\{a - \frac{a-1}{[2(a-1)^2 - q^2]}q^2 - \frac{5a+7}{32(a-1)^3(a-4)}q^4 - \frac{9a^2+58a+29}{64(a-1)^5(a-4)(a-9)}q^6\right\}^{1/2} - n. \tag{18}$$

Постоянные коэффициенты c_{2r+n}, входящие в уравнения (16) и (17), можно определить, подставив значение $\delta_1(t)$ из (16) в (15). Тогда для определения коэффициентов получается рекуррентное соотношение

$$[a - (2r+n+\beta)^2]\,c_{2r+n} - q\,(c_{2r+n-2} + c_{2r+n+2}) = 0. \tag{19}$$

Как показывают выполненные расчеты, для практически интересных случаев в выражениях для $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ с точностью до долей процента можно ограничиться всего лишь тремя членами разложения: $r = 0$ и $r = \pm 1$. Такое допущение значительно упрощает задачу и дает возможность достаточно просто произвести расчет траекторий электронов. В соответствии с вышесказанным уравнения (16) и (17) могут быть записаны в виде

$$\delta_1(t) = \sum_{r=-1}^{r=+1} c_{2r+n}\cos[(2r+n+\beta)\,t], \tag{20}$$

$$\delta_2(t) = \sum_{r=-1}^{r=+1} c_{2r+n}\sin[(2r+n+\beta)\,t] \tag{21}$$

3. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ

Чтобы вывести формулу для расчета траекторий электронов, определим отдельные члены, входящие в уравнение (13). Используя уравнения (8), (20) и (21), первый член с интегралом (13) можно записать в виде

$$\delta_1(t)\int_{t_0}^{t} f(t)\,\delta_2(t)\,dt = -\sum_{r=-1}^{r=+1} c_{2r+n} f^{*}_{2r+n}(t) \sum_{r=-1}^{r=+1} c_{2r+n} f^{**}_{2r+n}(t). \tag{22}$$

Здесь обозначено:

$$f^{*}_{2r+n}(t) = \cos[(2r+n+\beta)\,t], \tag{23}$$

$$f^{**}_{2r+n}(t) = \int_{t_0}^{t} (b - 2q\cos 2t)\sin[(2r+n+\beta)\,t]\,dt = \frac{b}{2r+n+\beta}\cos[(2r+$$

$$+ n+\beta)\,t_0] - \frac{q}{2r+n+\beta+2}\cos[(2r+n+\beta+2)\,t_0] -$$

$$- \frac{q}{2r+n+\beta-2}\cos[(2r+n+\beta-2)\,t_0] - \frac{b}{2r+n+\beta}\cos[(2r+n+\beta)\,t] +$$

$$+ \frac{q}{2r+n+\beta+2}\cos[(2r+n+\beta+2)\,t] +$$

$$+ \frac{q}{2r+n+\beta-2}\cos[(2r+n+\beta-2)\,t]. \tag{24}$$

Как показывают расчеты, коэффициенты c_{n-2} и c_{n+2} на один-два порядка меньше коэффициента c_n, поэтому при перемножении многочленов в выражении (22) мы будем пренебрегать произведениями этих малых коэффициентов и их квадратами. Тогда получим

$$\delta_1(t)\int_{t_0}^{t} f(t)\,\delta_2(t)\,dt = -\{c_n^2 f^{*}_{n}(t) f^{**}_{n}(t) +$$

$$+ c_n c_{n-2}[f^{*}_{n}(t) f^{**}_{n-2}(t) + f^{*}_{n-2}(t) f^{**}_{n}(t)] +$$

$$+ c_n c_{n+2}[f^{*}_{n+2}(t) f^{**}_{n}(t) + f^{*}_{n}(t) f^{**}_{n+2}(t)]\}. \tag{25}$$

Совершенно аналогичным образом может быть произведено вычисление второго интеграла, входящего в уравнение (13):

$$\delta_2(t)\int_{t_0}^{t} f(t)\,\delta_1(t)\,dt = -\sum_{r=-1}^{r=+1} c_{2r+n}\,F^{*}_{2+n}(t) \sum_{r=-1}^{r=+1} c_{2r+n}\,F^{**}_{2r+n}(t) =$$

$$= -\{c_n^2 F^{*}_{n}(t) F^{**}_{n}(t) + c_n c_{n-2}[F^{*}_{n}(t) F^{**}_{n-2}(t) + F^{*}_{n-2}(t) F^{**}_{n}(t)] +$$

$$+ c_n c_{n+2}[F^{*}_{n+2}(t) F^{**}_{n}(t) + F^{*}_{n}(t) F^{**}_{n+2}(t)]\}. \tag{26}$$

Здесь

$$F^{*}_{2r+n}(t) = \sin[(2r+n+\beta)\,t], \tag{27}$$

$$F^{**}_{2r+n}(t) = \int_{t_*}^{t} (b - 2q\cos 2t)\cos[(2r+n+\beta)\,t]\,dt =$$

$$= -\frac{b}{2r+n+\beta}\sin[(2r+n+\beta)\,t_0] + \frac{q}{2r+n+\beta+2}\sin[(2r+n+\beta+2)\,t_0] +$$

$$+ \frac{q}{2r+n+\beta-2}\sin[(2r+n+\beta-2)\,t_0] + \frac{b}{2r+n+\beta}\sin[(2r+n+\beta)\,t] -$$

$$- \frac{q}{2r+n+\beta+2}\sin[(2r+n+\beta+2)\,t] -$$

$$- \frac{q}{2r+n+\beta-2}\sin[(2r+n+\beta-2)\,t]. \qquad (28)$$

Производя подстановки из (25) и (26) в уравнение (13), получим

$$\delta''(t) = \frac{1}{c^2}\{\delta_0'[\delta_1(t_0)\,\delta_2(t) - \delta_2(t_0)\,\delta_1(t)] + \delta_0[\delta_2'(t_0)\,\delta_1(t) - \delta_1'(t_0)\,\delta_2(t)] +$$

$$+ c_n^2[f_n^*(t)\,f_n^{**}(t) - F_n^*(t)\,F_n^{**}(t)] + c_n c_{n-2}[f_n^*(t)\,f_{n-2}^{**}(t) - F_n^*(t)\,F_{n-2}^{**}(t) +$$

$$+ f_{n-2}^*(t)\,f_n^{**}(t) - F_{n-2}^*(t)\,F_n^{**}(t)] + c_n c_{n+2}[f_n^*(t)\,f_{n+2}^{**}(t) -$$

$$- F_n^*(t)\,F_{n+2}^{**}(t) + f_{n+2}^*(t)\,f_n^{**}(t) - F_{n+2}^*(t)\,F_n^{**}(t)]\}. \qquad (29)$$

Пользуясь формулами (23), (24), (27) и (28), определим члены в квадратных скобках, стоящие после c_n^2, $c_n c_{n-2}$ и $c_n c_{n+2}$ в уравнении (29):

$$f_n^*(t)\,f_n^{**}(t) - F_n^*(t)\,F_n^{**}(t) = A_0\cos[(n+\beta)\,(t_0-t)] -$$

$$- B_0\cos[(n+\beta)\,(t_0-t) - 2t_0] - D_0\cos[(n+\beta)\,(t_0-t) + 2t_0] - A_0 +$$

$$+ (B_0 + D_0)\cos 2t, \qquad (30)$$

$$f_n^*(t)\,f_{n-2}^{**}(t) - F_n^*(t)\,F_{n-2}^{**}(t) + f_{n-2}^*(t)\,f_n^{**}(t) - F_{n-2}^*(t)\,F_n^{**}(t) =$$

$$= A_0\cos[(n+\beta-2)\,(t_0-t) + 2t_0] - B_0\cos[(n+\beta-2)\,(t_0-t)] -$$

$$- D_0\cos[(n+\beta-2)\,(t_0-t) + 4t_0] + A_{-1}\cos[(n+\beta)\,(t_0-t) - 2t_0] -$$

$$- B_{-1}\cos[(n+\beta)\,(t_0-t) - 4t_0] - D_{-1}\cos[(n+\beta)\,(t_0-t)] -$$

$$- (A_0 + A_{-1})\cos 2t + (D_0 + B_{-1})\cos 4t + (D_{-1} + B_0), \qquad (31)$$

$$f_n^*(t)\,f_{n+2}^{**}(t) - F_n^*(t)\,F_{n+2}^{**}(t) + f_{n+2}^*(t)\,f_n^{**}(t) - F_{n+2}^*(t)\,F_n^{**}(t) =$$

$$= A_0\cos[(n+\beta+2)\,(t_0-t) - 2t_0] - B_0\cos[(n+\beta+2)\,(t_0-t) - 4t_0] -$$

$$- D_0\cos[(n+\beta+2)\,(t_0-t)] + A_1\cos[(n+\beta)\,(t_0-t) + 2t_0] -$$

$$- B_1\cos[(n+\beta)\,(t_0-t)] - D_1\cos[(n+\beta)\,(t_0-t) + 4t_0] -$$

$$- (A_0 + A_1)\cos 2t + (B_0 + D_1)\cos 4t + (B_1 + D_0). \qquad (32)$$

В формулах (30) — (32)

$$A_0 = \frac{b}{n+\beta}, \qquad B_0 = \frac{q}{n+\beta-2}; \qquad D_0 = \frac{q}{n+\beta+2};$$
$$A_{-1} = \frac{b}{n+\beta-2}; \quad B_{-1} = \frac{q}{n+\beta-4}; \quad D_{-1} = \frac{q}{n+\beta}; \tag{33}$$
$$A_1 = \frac{b}{n+\beta+2}; \quad B_1 = \frac{q}{n+\beta}; \qquad D_1 = \frac{q}{n+\beta+4}.$$

Выражения в квадратных скобках, стоящие в уравнении (29) после величин δ_0' и δ_0, вычисляются при помощи формул (20) и (21) при тех же допущениях и равны

$$\delta_1(t_0)\,\delta_2(t) - \delta_2(t_0)\,\delta_1(t) = -c_n c_{n-2}\sin[(n+\beta-2)(t_0-t)+2t_0] -$$
$$-c_{n-2}c_n\sin[(n+\beta)(t_0-t)-2t_0] - c_n^2\sin[(n+\beta)(t_0-t)] -$$
$$-c_{n+2}c_n\sin[(n+\beta)(t_0-t)+2t_0] - c_n c_{n+2}\sin[(n+\beta+2)(t_0-t)-2t_0], \tag{34}$$

$$\delta_2'(t_0)\,\delta_1(t) - \delta_1'(t_0)\,\delta_2(t) = c_n c_{n-2}(n+\beta)\cos[(n+\beta-2)(t_0-t)+2t_0] +$$
$$+c_{n-2}c_n(n+\beta-2)\cos[(n+\beta)(t_0-t)-2t_0] +$$
$$+c_n^2(n+\beta)\cos[(n+\beta)(t_0-t)] + c_{n+2}c_n(n+\beta+2)\cos[(n+\beta)(t_0-t)+$$
$$+2t_0] + c_n c_{n+2}(n+\beta)\cos[(n+\beta+2)(t_0-t)-2t_0]. \tag{35}$$

Входящий в уравнение (29) постоянный коэффициент c^2 может быть определен из уравнения (14), если в нем задать какое-либо частное значение t, например $t = t_0$. В этом случае из сопоставления уравнений (14) и (35) нетрудно заметить, что значение c^2 получается из (35), если там положить $t = t_0$. В результате будем иметь

$$c^2 = c_n^2(n+\beta) + 2[c_n c_{n-2}(n+\beta-1) + c_n c_{n+2}(n+\beta+1)]\cos 2t_0. \tag{36}$$

Таким образом, теперь определены все члены, входящие в уравнение (29). Подставляя их значения из соотношений (30) — (35), в итоге будем иметь

$$\delta(t) = \frac{1}{c^2}\Big[[\delta_0'\{c_n^2\sin[(n+\beta)(t-t_0)] + c_{n-2}c_n\sin[(n+\beta)(t-t_0)+2t_0] +$$
$$+c_{n+2}c_n\sin[(n+\beta)(t-t_0)-2t_0] + c_n c_{n-2}\sin[(n+\beta-2)(t-t_0)-2t_0]] +$$
$$+c_n c_{n+2}\sin[(n+\beta+2)(t-t_0)+2t_0]\} + \{\delta_0 c_n^2(n+\beta) + c_n^2 A_0 -$$
$$-c_n c_{n-2}D_{-1} - c_n c_{n+2}B_1\}\cos[(n+\beta)(t-t_0)] + \{\delta_0 c_{n-2}c_n(n+\beta-2) -$$
$$-c_n^2 B_0 + c_n c_{n-2}A_{-1}\}\cos[(n+\beta)(t-t_0)+2t_0] +$$
$$+\{\delta_0 c_{n+2}c_n(n+\beta+2) - c_n^2 D_0 + c_n c_{n+2}A_1\}\cos[(n+\beta)(t-t_0)-2t_0] -$$
$$-c_n c_{n-2}B_{-1}\cos[(n+\beta)(t-t_0)+4t_0] - c_n c_{n+2}D_1\cos[(n+\beta)(t-t_0)-$$
$$-4t_0] - c_n c_{n-2}B_0\cos[(n+\beta-2)(t-t_0)] + \{\delta_0 c_n c_{n-2}(n+\beta) +$$
$$+c_n c_{n-2}A_0\}\cos[(n+\beta-2)(t-t_0)-2t_0] - c_n c_{n-2}D_0\cos[(n+\beta-2)\times$$
$$\times(t-t_0)-4t_0] - c_n c_{n+2}D_0\cos[(n+\beta+2)(t-t_0)] + \{\delta_0 c_n c_{n+2}(n+\beta) +$$
$$+c_n c_{n+2}A_0\}\cos[(n+\beta+2)(t-t_0)+2t_0] - c_n c_{n+2}B_0\cos[(n+\beta+2)\times$$
$$\times(t-t_0)+4t_0] + [-c_n^2 A_0 + c_n c_{n-2}(D_{-1}+B_0) + c_n c_{n+2}(B_1+D_0)] +$$
$$+\{c_n^2(B_0+D_0) - c_n c_{n-2}(A_0+A_{-1}) - c_n c_{n+2}(A_0+A_1)\}\cos 2t +$$
$$+\{c_n c_{n-2}(D_0+B_{-1}) + c_n c_{n+2}(B_0+D_1)\}\cos 4t]\Big]. \tag{37}$$

Здесь $t \geqslant t_0$. Уравнение (37) является общим и позволяет определить траекторию параксиального электрона для любых условий: электрон может входить в периодическое магнитное поле при любой его фазе, может иметь произвольные радиальную координату и угол наклона к оси. Расчет может быть произведен для разных случаев движения электронов пучка в ЛБВ, математически соответствующих любой зоне стабильности уравнения Матье. Полученное уравнение является несколько громоздким. Однако значительное его упрощение может быть достигнуто при рассмотрении частных случаев.

4.1 ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Предположим, что электрон входит в периодическое магнитное поле в точке, где магнитное поле на оси максимально, т. е. , в соответствии с формулами (2) и (4), при $z = z_0 = L/4$ и $t_0 = \pi/2$. Подставляя это значение t_0 в уравнение (37) и производя тригонометрические преобразования, приведем его к виду

$$\delta(t) = \delta_{sn} \sin\left[(n+\beta)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \delta_{sn-2} \sin\left[(n+\beta-2)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] +$$
$$+ \delta_{sn+2} \sin\left[(n+\beta+2)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \delta_{cn} \cos\left[(n+\beta)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] +$$
$$+ \delta_{cn-2} \cos\left[(n+\beta-2)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \delta_{cn+2} \cos\left[(n+\beta+2)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] +$$
$$+ \delta_{\text{п}} + \delta_2 \cos 2t + \delta_4 \cos 4t \qquad (38)$$

или более сокращенно:

$$\delta(t) = \delta_{\text{п}} + \sum_{r=-1}^{r=+1} \delta_{s2r+n} \sin\left[(2r+n+\beta)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] +$$
$$+ \sum_{r=-1}^{r=+1} \delta_{c2r+n} \cos\left[(2r+n+\beta)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \delta_2 \cos 2t + \delta_4 \cos 4t. \qquad (39)$$

В уравнениях (38) и (39) обозначено:

$$\delta_{sn} = \frac{1}{c^2}\delta_0'[c_n^2 - c_n'(c_{n-2} + c_{n+2})]; \qquad (40)$$

$$\delta_{sn-2} = -\frac{1}{c^2}\delta_0' c_n c_{n-2}; \qquad (41)$$

$$\delta_{sn+2} = -\frac{1}{c^2}\delta_0' c_n c_{n+2}; \qquad (42)$$

$$\delta_{cn} = \frac{1}{c^2}\{\delta_0[c_n^2(n+\beta) - c_{n-2}c_n(n+\beta-2) - c_{n+2}c_n(n+\beta+2)] +$$
$$+ c_n^2(A_0 + B_0 + D_0) - c_n c_{n-2}(A_{-1} + B_{-1} + D_{-1}) -$$
$$- c_n c_{n+2}(A_1 + B_1 + D_1)\}; \qquad (43)$$

$$\delta_{cn-2} = -\frac{1}{c^2} c_n c_{n-2}[\delta_0(n+\beta) + A_0 + B_0 + D_0]; \qquad (44)$$

$$\delta_{cn+2} = -\frac{1}{c^2} c_n c_{n+2}[\delta_0(n+\beta) + A_0 + B_0 + D_0]; \qquad (45)$$

$$\delta_{\text{п}} = \frac{1}{c^2}[-c_n^2 A_0 + c_n c_{n-2}(D_{-1} + B_0) + c_n c_{n+2}(B_1 + D_0)]; \qquad (46)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{c^2}\left[c_n^2(B_0 + D_0) - c_n c_{n-2}(A_0 + A_{-1}) - c_n c_{n+2}(A_0 + A_1)\right]; \quad (47)$$

$$\delta_4 = \frac{1}{c^2}\left[c_n c_{n-2}(D_0 + B_{-1}) + c_n c_{n+2}(B_0 + D_1)\right]; \quad (48)$$

$$c^2 = c_n^2(n+\beta) - 2\left[c_n c_{n-2}(n+\beta-1) + c_n c_{n+2}(n+\beta+1)\right]. \quad (49)$$

5. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Произведем расчет траектории крайнего электрона в периодическом фокусирующем устройстве ЛБВ, для которой параметры, определяемые уравнениями (10) и (11), соответственно равны $B_b^2 = 0{,}89 \cdot 10^{-4}$; $\lambda_p = 7{,}75 \cdot 10^{-2}$. Лампа работает в периодическом магнитном поле с максимальной индукцией $B_{z0} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *вб/м*^{2} и периодом $L = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ *м*. Индукция на катоде лампы $B_{z\,к} = 2{,}18 \cdot 10^{-2}$ *вб/м*^{2}. По формулам (6), (7) и (9) вычисляем параметры уравнения Матье: $a = 0{,}384$, $q = 0{,}0531$, $b = 2{,}44 \cdot 10^{-3}$, при этом принимается, что $\alpha = r_к/r_0 = 1$. Вычисленным значениям a и q на рис. 1 соответствует точка в области устойчивости, расположенная между кривыми a_0 и b_1, т. е. в нулевой зоне $n = 0$, поэтому решения однородного уравнения Матье представляются уравнениями (20) и (21). Коэффициент β, входящий в эти уравнения, определяется по формуле (18) и равен $\beta = 0{,}62153$. Постоянные коэффициенты c_{2r}, входящие в уравнения (20) и (21), находятся из рекуррентного соотношения (19); положим последовательно $r = -2$; -1; $+1$ и $+2$ (ввиду малости можно пренебречь значениями коэффициентов c_{-6} и c_6). Уравнение (19) при $r = 0$ служит для проверки правильности определения коэффициентов. В результате расчета получены следующие значения коэффициентов: $c_2 = -821 \cdot 10^{-5} c_0$; $c_{-2} = -3500 \cdot 10^{-5} c_0$; $c_4 = 2{,}08 \times 10^{-5} c_0$; $c_{-4} = 16{,}9 \cdot 10^{-5} c_0$. По формулам (33) определяем постоянные величины $A_0 = 0{,}00392$; $B_0 = -0{,}0385$; $D_0 = 0{,}0203$; $A_{-1} = -0{,}00177$; $B_{-1} = -0{,}0157$; $D_{-1} = 0{,}0855$; $A_1 = 0{,}00093$; $B_1 = 0{,}0855$; $D_1 = 0{,}0115$. Расчет траектории произведем для вышерассмотренного частного случая по уравнению (38). Коэффициент c^2 определяется по формуле (49) и равен $c^2 = 0{,}621\, c_0^2$. Примем, что электрон входит в периодическое магнитное поле, имея радиальную координату $r = r_0$ и угол наклона к оси $r_0' = 0$. Тогда в соответствии с формулой (3) $\delta_0 = \delta_0' = 0$. Определяя при помощи уравнений (40) — (48) коэффициенты, входящие в это уравнение (38), и подставляя их значения в это уравнение, окончательно получим

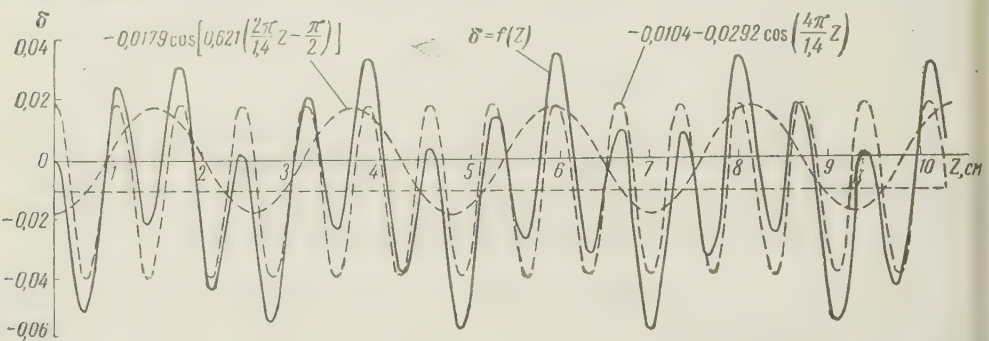


Рис. 2. График волнистости электронного пучка в фокусирующем устройстве с периодическим магнитным полем

$$\delta(t) = -0{,}0179\cos\left[0{,}621\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 0{,}00081\cos\left[1{,}38\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] -$$

$$- 0{,}00019\cos\left[2{,}62\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 0{,}0104 - 0{,}0292\cos 2t + 0{,}0001\cos 4t.$$

На рис. 2 по этому уравнению с учетом формулы (4) построен график волнистости электронного пучка $\delta = f(z)$ и графики функций, дающих основной вклад в зависимость $\delta(z)$. Конфигурация электронного пучка будет определяться уравнением (3). Как видно из рис. 2, колебания электронов в фокусирующем устройстве имеют несинусоидальный характер. Граница электронного пучка получается сильно изрытой. Максимальное относительное изменение радиуса пучка в процессе колебаний составляет 9,2%. Фокусирующее устройство, рассмотренное в этом примере, было осуществлено экспериментально и обеспечивало прохождение на коллектор более 90% общего тока, даваемого катодом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный выше расчет траекторий электронов в фокусирующем устройстве с периодическим магнитным полем базируется на приближенном решении неоднородного уравнения Матье. Выполненные расчеты показывают, что построение траекторий требует сравнительно небольших затрат труда. Достоинством метода является также то, что он позволяет судить о точности расчетов без дополнительных вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. M. Clogston, H. Heffner, Focusing of an electron beam by periodic fields, J. Appl. Phys., 1954, 25, 4, 436.
2. K. K. N. Chang, Beam focusing by periodic and complementary fields, Proc. I.R.E., 1955, 43, 1, 62.
3. Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, перев. с англ. под ред. И. Н. Денисюка, ИЛ, 1953.

Поступила в редакцию
6 I 1959

1960 № 2

О БРИЛЛЮЭНОВСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКАХ И КОНЦЕПЦИИ ГРАНИЧНОЙ ЧАСТИЦЫ

А. Д. Власов

Рассматривается устойчивость электронных пучков, рассчитанных на основе предположения о наличии граничных частиц и ламинарном движении электронов. Показано, что этот распространенный подход в действительности не всегда дает правильные результаты, приводя в ряде случаев к пучкам неустойчивой структуры.

Исследование электронных пучков, фокусируемых продольным магнитным полем, при заметном значении собственного пространственного заряда пучка обычно основывается на предположении о наличии граничных частиц. Именно, составляют и решают уравнение движения электрона, находящегося на внешней границе (поверхности) пучка. Траектории электронов внутри пучка предполагаются подобными траектории граничного электрона («ламинарный» поток).

Концепция граничной частицы была положена в основу при построении известных потоков Бриллюэна [1] и получила широкое распространение в отечественной и зарубежной литературе [2—12]. В частности, главы о влиянии собственного пространственного заряда в книгах Дж. Р. Пирса [5] и П. А. Стэррока [6] целиком основываются на этой концепции, частично она использована и в книге В. Глазера [12]. В работах [10,11] также рассматриваются пучки, фокусируемые электростатическими полями.

В названных работах рассматриваются по существу лишь условия равновесия частиц в электронном пучке, между тем должна быть обеспечена также и устойчивость рассматриваемой равновесной структуры пучка.

Воспользуемся цилиндрической системой координат r, ϑ, z, ось z которой совпадает с осью пучка. Будем считать, что пучок фокусируется продольным магнитным полем с индукцией B_z, обладающим, как и сам электронный пучок, аксиальной симметрией. Изменения радиуса пучка вдоль оси z будем считать относительно медленными. При этих допущениях радиальное движение электрона в пучке описывается известным уравнением

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) + \frac{e^2B_z^2}{4m}r = P_r + \frac{e^2}{4m}\left(B_z - \frac{2m}{e}\dot{\vartheta}\right)_0^2 \frac{r_0^4}{r^3}. \qquad (1)$$

Здесь $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$; m_0 — масса покоя электрона; $-e$ — его заряд; $\beta = v/c$ — отношение скорости электрона к скорости света; t — время; P_r — радиальная сила, обусловленная собственным пространственным зарядом пучка. Индексом 0 отмечены начальные значения величин.

Пусть — $I(r, r_г)$ — ток через сечение радиуса r. При фиксированном r этот ток может изменяться вдоль пучка вследствие изменения внешнего радиуса пучка $r_г$. Как следует из теоремы Гаусса и закона полного тока, собственный заряд пучка создает электрическое и магнитное поля с составляющими

$$E_r = -\frac{I(r, r_г)}{2\pi\varepsilon_0 v_z r}, \quad B_\vartheta = -\frac{I(r, r_г)}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

Следовательно,

$$P_r = -e(E_r - v_z B_\vartheta) = \frac{e(1-\beta_z^2)}{2\pi\varepsilon_0 v_z}\,\frac{I(r,\, r_\Gamma)}{r}.$$

Подставим это выражение в уравнение (1). Переходя к переменной $\rho = r\sqrt{m/m_0}$ и учитывая медленность изменения (или постоянство) m, приведем уравнение (1) к более удобному виду

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + A\rho = \frac{BI(\rho,\, \rho_\Gamma)}{\rho} + \frac{C\rho_0^4}{\rho^3}, \tag{2}$$

где обозначено

$$A = \frac{e^2 B_z^2}{4m^2}, \quad B = \frac{e(1-\beta_z^2)}{2\pi\varepsilon_0 m_0 v_z}, \quad C = \left(\frac{eB_z}{2m} - \dot{\vartheta}\right)_0^2. \tag{3}$$

Если существуют электроны, находящиеся все время на внешней границе пучка ($\rho = \rho_\Gamma$), то движение каждого из них описывается уравнением

$$\frac{d^2\rho_\Gamma}{dt^2} + A\rho_\Gamma = \frac{BI}{\rho_\Gamma} + \frac{C\rho_{\Gamma 0}^4}{\rho_\Gamma^3}. \tag{4}$$

Здесь $I = I(\rho_\Gamma,\, \rho_\Gamma)$ — полный ток пучка. Характерной особенностью уравнения граничной частицы (4) является член, содержащий ρ_Γ в минус первой степени.

В дальнейшем будем считать плотность тока везде по сечению пучка одинаковой, т. е. положим $I(\rho,\, \rho_\Gamma) = I\rho^2/\rho_\Gamma^2$. Продольную скорость v_z и коэффициенты A, B, C будем считать одинаковыми для всех частиц и постоянными вдоль пучка, как это делается в большинстве упомянутых выше работ (рассуждения качественно не изменились бы и при медленном изменении v_z, A, B, C вдоль пучка).

Согласно (3), $BI > 0$, $C \geqslant 0$. Как можно видеть из (4), существование радиально-ограниченного пучка возможно лишь при $A > 0$.

Ванг показал [3], что решение уравнения граничной частицы [4] при $A > 0$ представляет собой периодическую положительную функцию с некоторым периодом T,

$$\rho_\Gamma = \rho_\Gamma(t) = \rho_\Gamma(t+T), \tag{5}$$

колеблющуюся около равновесного значения радиуса ρ_1, определяемого биквадратным уравнением

$$A\rho_1^4 = BI\rho_1^2 + C\rho_{\Gamma 0}^4. \tag{6}$$

Уравнение (6) получается из (4), если положить $\rho_\Gamma = \text{const}$.

Вследствие нелинейности уравнения (4) колебания ρ_Γ относительно радиуса ρ_1 асимметричны, и их период T зависит от размаха колебаний, определяемого начальными условиями для граничной частицы ($\rho_{\Gamma 0}$, $\dot{\rho}_{\Gamma 0}$).

Траектория граничной частицы (5) удовлетворяет, очевидно, и уравнению внутренних траекторий (2). Как уже было отмечено, внутренние траектории предполагаются подобными траектории граничной частицы. Это означает, что внутренние траектории должны описываться частными решениями уравнения (2) при начальных условиях, связанных определенным соотношением и поэтому зависящих только от одной произвольной постоянной.

Однако практически неизбежны некоторые (небольшие) отклонения начальных условий от предположенных, поэтому надо обратиться к об-

нему решению уравнения (2), зависящему от двух произвольных постоянных. Для устойчивости структуры пучка необходимо, чтобы небольшие отклонения начальных условий приводили лишь к ограниченным отклонениям траекторий частиц от предполагаемых.

Рассмотрим случай $C = 0$, приводимый во многих работах [1 — 6]. Этот простейший случай имеет место, например, при $B_{z0} = 0$ и $\dot{\vartheta}_0 = 0$, когда катод экранирован от фокусирующего магнитного поля, и электроны покидают катод с нулевыми азимутальными скоростями. Уравнение (2) становится линейным

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \left(A - \frac{BI}{\rho_г^2}\right)\rho = 0, \tag{7}$$

а требуемое фокусирующее поле (при заданных BI, ρ_1) — минимальным: $B_z = B_{z\,мин} = 2m\sqrt{BI}/e\rho_1$ (см. (6) и (3)).

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\rho(t) = C_1\rho_г + C_2\rho_{II}, \tag{8}$$

где $\rho_{II} = \rho_{II}(t)$ — второе частное решение уравнения (7), линейно-независимое от $\rho_г$ (5). Номинально внутренние траектории частиц считаются подобными траектории граничной частицы (5), т. е. считается $C_2 = 0$ и $0 \leqslant C_1 \leqslant 1$, для чего начальные условия для каждой из частиц должны в точности удовлетворять соотношению

$$\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} = \frac{\dot{\rho}_{г0}}{\rho_{г0}}. \tag{9}$$

Поскольку практически $C_2 \neq 0$, необходимо установить, является ли решение ρ_{II} ограниченным (устойчивым). Уравнение внутренних траекторий (7), коэффициент в котором зависит от $\rho_г$ и периодически изменяется с периодом T, как было отмечено, имеет периодическое и положительное частное решение $\rho_г$ (5) с тем же периодом T. Но, как известно из теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами, такой случай соответствует границе устойчивости решений, причем второе частное решение ρ_{II} неограниченно возрастает со временем как $t\varphi(t)$ (φ — периодическая функция с периодом T).

Следовательно, в рассмотренном случае электронный пучок, рассчитанный на основе предположения о наличии граничных частиц, неустойчив. Малейшие отступления от условия (9), практически неизбежные, приводят к появлению расходящихся траекторий (8), т. е. к разрушению пучка.

В частности, это относится и к потокам Бриллюэна [1]. Неустойчивость бриллюэновских потоков, для которых $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ и $\rho_г = \rho_1 = \sqrt{BI/A} = \text{const}$, особенно очевидна. Отступления от начального условия $\dot{\rho}_0 = 0$ ввиду прямолинейности траекторий частиц приводят к разрушению пучка. Недаром на практике осуществление потоков Бриллюэна считают затруднительным [5] и обычно берут магнитное поле в полтора-два раза больше бриллюэновского значения $B_z = B_{z\,мин}$ [4, 9].

Заметим, что и Пирс изложение метода граничной частицы сопровождает оговорками (на стр. 148, 149) [5], не вскрывающими, однако, существа вопроса.

Положим теперь $C \neq 0$. Уравнение внутренних траекторий (2) принимает вид

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \left(A - \frac{BI}{\rho_г^2}\right)\rho = \frac{C\rho_0^4}{\rho^3}. \tag{10}$$

Как нетрудно видеть, этому уравнению удовлетворяют внутренние траектории, подобные траектории граничной частицы (5),

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\rho_{r0}} \rho_r(t). \tag{11}$$

Как и прежде, уравнение внутренних траекторий (10) имеет периодический коэффициент периода T и положительное периодическое частное решение (11) того же периода T. Но, в отличие от случая $C = 0$, отсюда вытекает устойчивость предположенной структуры пучка по отношению к отклонениям начальных условий. Действительно, как легко убедиться подстановкой, общее решение уравнения (10) выражается в виде

$$\rho = \sqrt{\rho_I^2 + C\rho_0^4\rho_{II}^2}, \tag{12}$$

где $\rho_{I,II}(t)$ — два некоторых линейно-независимых частных решения линейного уравнения (7)*. Одно из решений (12) может быть периодическим только в случае, если решения $\rho_{I,II}$ линейного уравнения (7) лежат в области устойчивости, т. е. только в случае ограниченности любого из решений (12).

Заметим, что исследование расходящегося электронного пучка при $C = 0$ и $A \leqslant 0$ также показывает устойчивость структуры, предполагающей наличие граничных частиц. Решение уравнения граничной частицы (4), в отличие от (5), в этом случае является апериодическим и при $\dot{\rho}_{r0} < 0$ сначала убывает, проходит через минимум (соответствующий «шейке» пучка) и затем неограниченно возрастает. Начальные отклонения внутренних траекторий от предположенных на стадии сужения пучка возрастают, что может привести к заметному расширению шейки пучка, но по прохождении шейки убывают и притом неограниченно. При $\dot{\rho}_{r0} \geqslant 0$ стадия сужения пучка отсутствует.

Выше было принято $A = \text{const}$. В ряде работ рассматривается фокусировка посредством магнитных [9, 10], а также и электростатических [10, 11] полей, периодически изменяющихся вдоль оси z. Коэффициент A при этом представляет периодическую функцию с некоторым периодом T_0.

В работах [9—11] считается $C = 0$ и придается особое значение частному случаю, когда траектория граничной частицы (и подобные ей траектории внутренних частиц) описывается периодическими функциями с периодом $T = T_0$. Ясно, что в действительности в этом случае пучок неустойчив, как и в первом из рассмотренных выше случаев ($C = 0$, $A = \text{const} > 0$). Периодичность коэффициента в уравнении (7) не изменяется, конечно, при изменении A с периодом $T = T_0$, и последующие выводы остаются в силе.

В случаях неустойчивости, приводящей к разрушению электронного пучка первоначально предположенной структуры (с граничными частицами и непересекающимися подобными траекториями), при известных условиях образуется пучок иного, устойчивого строения. Разумеется, лишь в достаточно длинных электронно-оптических устройствах образование устойчивой структуры пучка успевает завершиться. Подробное рассмотрение устойчивых структур электронных пучков и процессов их образования не входит в задачу настоящей статьи. Заметим только, что для этого фокусирующее поле всегда должно с достаточным запасом превышать $B_{z\text{мин}}$.

---

* Именно, $\rho_{I,II}$ должны удовлетворять начальным условиям $\rho_I(0) = \rho(0)$, $\dot{\rho}_I(0) = \dot{\rho}(0)$, $\rho_{II}(0) = 0$, $\dot{\rho}_{II}(0) = 1/\rho(0)$. При подстановке (12) в (10) необходимо учесть, что вследствие отсутствия первой производной в уравнении (7) $\rho_{I}\dot{\rho}_{II} - \dot{\rho}_I\rho_{II} = \text{const} = 1$.

Таким образом, предположение о наличии граничных частиц и ламинарном движении электронов в пучке не всегда приводит к правильным результатам. В устойчивом электронном пучке, вообще говоря, траектории частиц не совпадают с внешней поверхностью пучка, и последнюю надо рассматривать лишь как их огибающую.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Brillouin, Phys. Rev., 1945, 67, 260.
2. В. Т. Овчаров, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 6, 696.
3. C. C. Wang, Proc. I.R.E., 1950, 38, 135.
4. J. T. Mendel, Proc. I.R.E., 1955, 43, 3, 327.
5. Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, Изд. Советское радио, 1956.
6. П. А. Стэррок, Статическая и динамическая электронная оптика, ИЛ, 1953.
7. W. Kleen, K. Pöschl, Arch. elektr. Übertrag., 1955, 9, 7, 295.
8. Л. Э. Бахрах, И. Ш. Козель, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 6, 819.
9. J. T. Mendel, C. F. Quate, W. H. Vocom, Proc. I.R.E., 1954, 42, 5, 800.
10. A. M. Clogston, H. Heffner, J. Appl. Phys., 1954, 25, 436.
11. P. K. Tien, J. Appl. Phys., 1954, 25, 1281.
12. В. Глазер, Основы электронной оптики, ГИТТЛ, 1957.

Поступила в редакцию
8 IV 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1960 № 2

РЕЗОНАНСНЫЕ ФЕРРИТОВЫЕ СИСТЕМЫ С БОЛЬШИМ ВЕНТИЛЬНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

А. Л. Микаэлян, А. К. Столяров, М. М. Коблова

Изложены некоторые результаты экспериментального исследования резонансных явлений в прямоугольных волноводах с ферритами. Показано, что соответствующим выбором параметров и размеров ферритовой пластины можно значительно улучшить вентильные свойства системы. Приведены характеристики двух вентилей. Один из них имеет вентильное отношение более 500 и может быть использован в радиорелейных линиях связи.

ВВЕДЕНИЕ

Ферритовые резонансные вентили (рис. 1), благодаря простоте конструкции и хорошим электрическим параметрам, находят все более широкое применение в различных устройствах техники СВЧ. Однако теория резонансных явлений в волноводах с ферритами развита все еще слабо, в результате чего вентили отрабатываются в основном эмпирическим путем.

Приближенная теория резонансных явлений в прямоугольных волноводах с ферритами, изложенная в работах [1] и [2], позволила установить особенности работы вентилей различных типов, сравнить их между собой по электрическим параметрам и выяснить роль дополнительного диэлектрического слоя. Однако упомянутая теория является лишь первым шагом на пути изучения резонансных явлений в ферритах, так как ее выводы, строго говоря, справедливы лишь для очень тонких ферритовых пластин и в качественном отношении, как показано в [2], могут быть использованы для рассмотрения явлений в толстых пластинах лишь в тех случаях, когда ферритовые пластины по высоте полностью наполняют пространство между широкими стенками волновода.

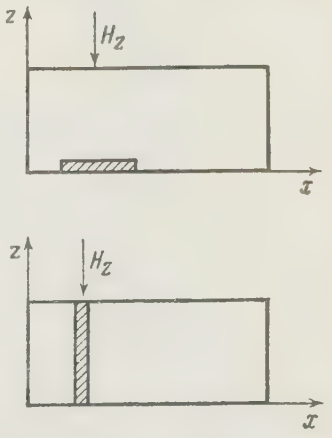


Рис. 1. Два основных типа резонансных вентилей

При толстых ферритовых пластинах с неполной высотой происходят новые явления, которые даже качественно не отображаются приближенной теорией и вместе с тем представляют большой интерес. Одно из таких явлений состоит в том, что при определенных условиях резонанс для волн прямого и обратного направлений происходит при различных значениях постоянного поля. Это явление хотя и наблюдалось экспериментально [1,3], однако оно не было изучено и специально не использовалось для усовершенствования резонансных вентилей.

В настоящей статье описываются результаты экспериментального исследования указанного явления и выясняется, как его можно использовать для улучшения вентильных характеристик.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В СЛУЧАЕ ЧИСТЫХ ФЕРРИТОВЫХ ПЛАСТИН

На рис. 2 показаны резонансные кривые прямой волны при различных положениях ферритовой пластины в волноводе. При этом резонанс для обратной волны, независимо от места расположения ферритовой пластины, наблюдался при одном и том же постоянном магнитном поле, которое отмечено на рис. 2 пунктирной линией. В этих экспериментах был использован феррит марки ХМ-3 [4], который имеет намагниченность насыщения 550 *гс* и фактор затухания $\delta = 0{,}1$. Из рассмотренных кривых рис. 2 можно видеть, что если ферритовая пластина установлена вплотную к боковой стенке волновода, то резонансные поля для прямой и обратной волн различаются наиболее сильно. По мере отодвигания феррита от узкой стенки волновода максимум прямых потерь смещается в область более сильных полей, постепенно приближаясь к величине магнитного поля, соответствующей резонансу обратной волны. При этом кривая прямых потерь может становиться даже двугорбой (в нашем примере при $t_2 = 7$ *мм*).

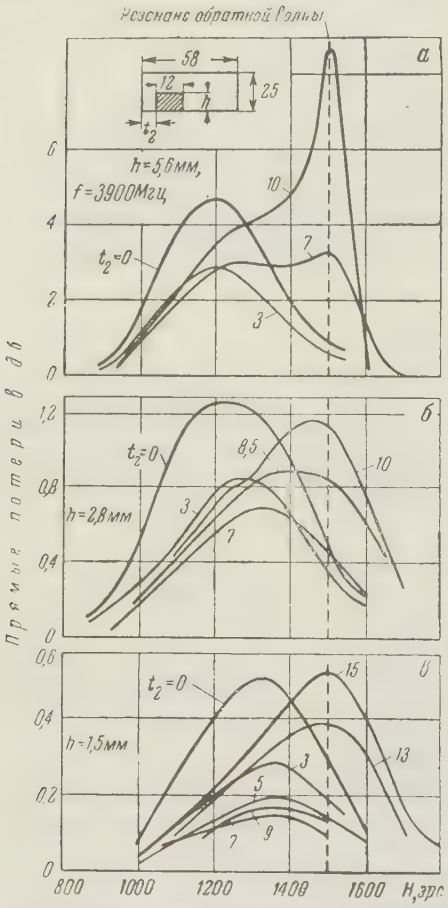


Рис. 2. Кривые резонансного поглощения прямой волны в ферритовых пластинах различной толщины

На рис. 2, *а*,*б*,*в* показано также влияние размеров феррита на форму резонансных кривых потерь для прямой волны. Как видим, уменьшение толщины ферритовой пластины приводит к сближению резонансных линий прямой и обратной волн. При этом, если ферритовая пластина очень тонкая, расхождение резонансных полей обратной и прямой волн пропадает, что хорошо согласуется с выводами приближенной теории, согласно которой максимальное поглощение прямой и обратной волн должно наблюдаться при одном и том же постоянном магнитном поле.

Таким образом, заметный разнос резонансных частот для прямой и обратной волн наблюдается лишь в том случае, когда ферритовая пластина имеет достаточную толщину и, следовательно, заметно искажает структуру поля волны пустого волновода. При этом, ввиду разрыва непрерывности электрического поля E на верхней поверхности феррита, в нем возбуждается магнитное поле сложной структуры, которое имеет составляющие по всем трем осям. Всякое же изменение структуры магнитного поля, как было показано в [2], существенно меняет характер резонансного поглощения прямой волны в феррите.

Отметим также, что по мере удаления феррита от широкой стенки волновода смещение резонансного поля прямой волны относительно обратной уменьшается, достигая наименьшей величины при размещении пластины посредине между широкими стенками волновода (ср. рис. 2 и 3).

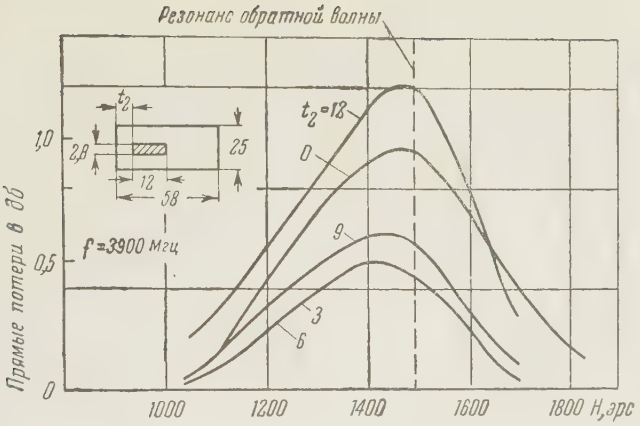


Рис. 3. Влияние на форму резонансных кривых перемещения ферритовой пластины между широкими стенками волновода

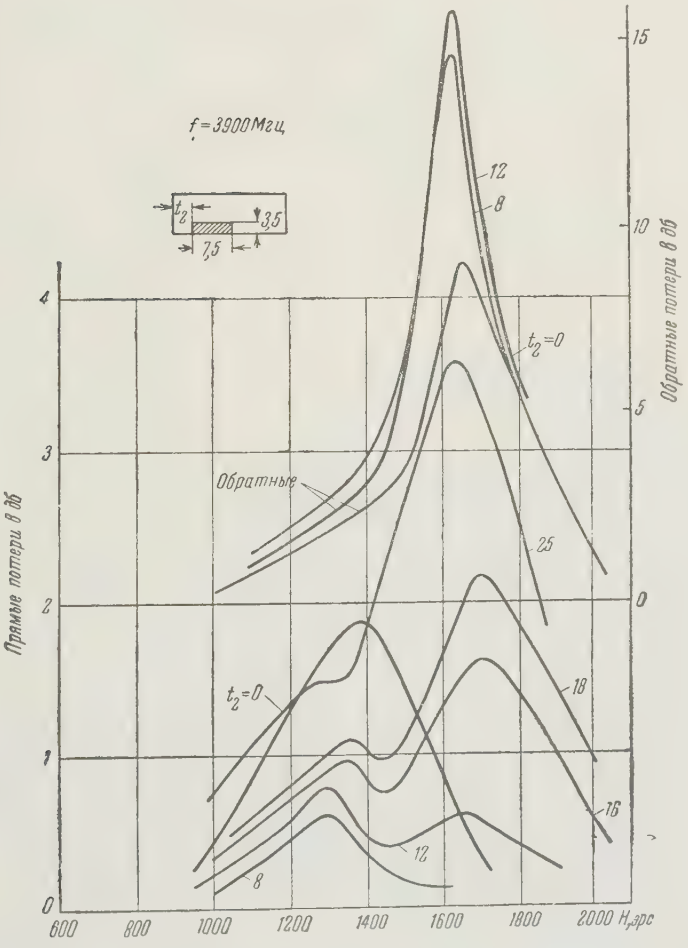


Рис. 4. Вид кривых резонансного поглощения в феррите с большой намагниченностью насыщения (1050 *гс*)

Для выяснения влияния параметров феррита на разнос резонансных кривых прямой и обратной волн нами были проведены аналогичные эксперименты с ферритом ХММ-1, который имеет намагниченность насыщения, примерно вдвое большую, чем ХМ-3 (1050 *гс*). Полученные результаты представлены на рис. 4.

Как видим, в этом случае расхождения резонансов прямой и обратной волн выражены более сильно, чем для феррита ХМ-3. При этом кривая потерь прямой волны имеет явно выраженный двугорбый характер. Второй максимум прямых потерь всегда совпадает с резонансом обратной волны. Положение же первого максимума близко к случаю, соответствующему поперечному ферромагнитному резонансу.

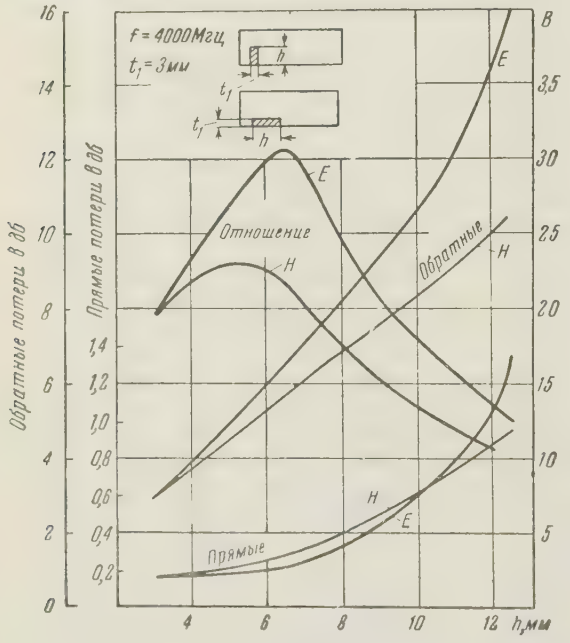


Рис. 5. Зависимость вентильных свойств системы от ширины ферритовой пластины

Этим, видимо, определяется максимальное смещение резонансного поля для прямой волны относительно обратной. Так, если пластина феррита расположена в плоскости E, то резонанс обратной волны наблюдается при поле, близком к поперечному резонансу, поэтому расхождение резонансных полей получается небольшим.

Описанные явления имеют большое практическое значение, так как позволяют значительно увеличить максимальное вентильное отношение, которое удается получить от резонансных вентилей. Это легко видеть из кривых рис. 5, которые показывают изменение потерь в ферритах и даваемого ими вентильного отношения в зависимости от размера пластины h. Кривые получены для пластин, расположенных в плоскости E, и в плоскости H. Как видим, в обоих случаях существует оптимальный размер h пластины, при котором вентильные свойства оказываются наилучшими.

Согласно же приближенной теории, вентильные свойства пластины, расположенной в плоскости H, должны улучшаться по мере уменьшения ширины феррита, достигая в пределе величины [1]

$$B = 4/\delta^2, \qquad (1)$$

где δ — фактор затухания, определяемый из ширины резонансной линии.

В рассматриваемых экспериментах при оптимальном h получаем вентильное отношение, большее, чем при очень тонких ферритах, т. е. переходим предел, устанавливаемый приведенной формулой. Таким образом, наличие оптимального размера h пластины связано со смещением резонансных частот для волн прямого и обратного направлений.

2. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДИЭЛЕКТРИКА

Перейдем теперь к рассмотрению резонансных явлений в двухслойных пластинах, когда высота диэлектрика и феррита значительно меньше размера узкой стенки волновода. Эти случаи также не охватываются приближенной теорией.

На рис. 6 показана зависимость от напряженности постоянного магнитного поля потерь прямой и обратной волн в феррите с диэлектрическим слоем.

Для удобства сравнения на том же рисунке (вверху) нанесены кривые потерь для чистого феррита. Из их рассмотрения следует, что с введением диэлектрического слоя резонанс обратной волны смещается в область бо-

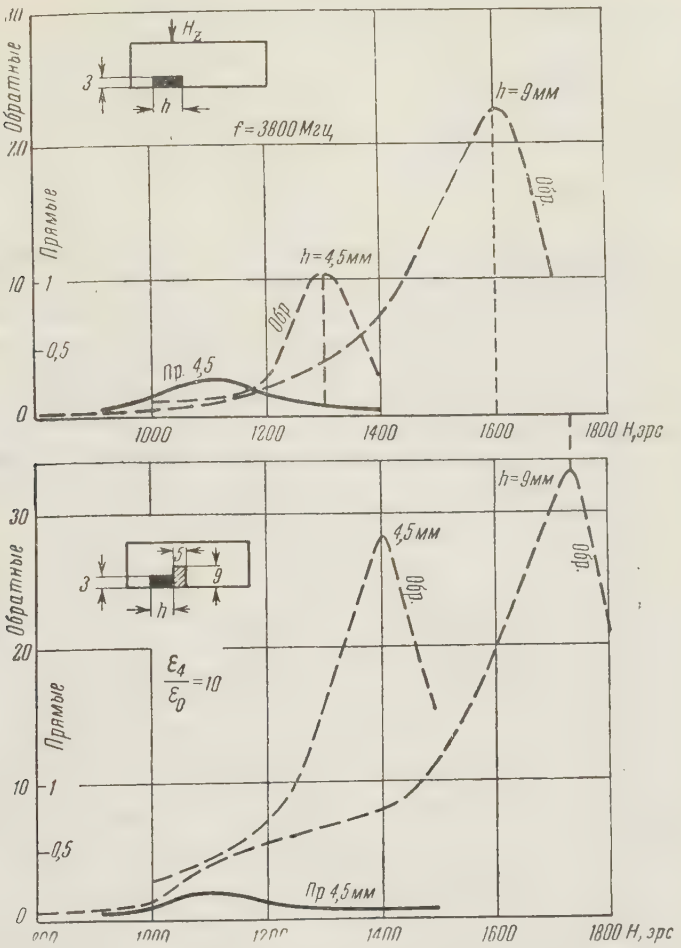


Рис. 6. Влияние дополнительного диэлектрического слоя на вид резонансных кривых

лее сильных полей, в то время как магнитное поле, при котором имеет место резонанс прямой волны, остается неизменным. Это означает, что при помощи диэлектрика можно увеличить смещение резонансных полей прямой и обратной волн и тем самым улучшить свойства резонансных вентилей.

Мы уже отмечали, что расхождение резонансных полей прямой и обратной волн связано с возбуждением внутри феррита новых волн со сложной структурой поля.

Диэлектрик, когда его высота значительно меньше размера узкой стенки волновода, также сильно видоизменяет структуру поля волны в волноводе, так как за счет разрыва непрерывности электрического поля E на верхней границе диэлектрика возбуждаются составляющие полей и по другим осям. При этом наиболее сильно выражена составляющая электрического поля по оси x.

Таким образом, изменением высоты диэлектрика можно управлять структурой поля волны в феррите и, следовательно, резонансными явлениями в нем.

На рис. 7 представлены результаты экспериментального исследования зависимости магнитного поля, при котором имеет место резонанс обратной волны, от высоты диэлектрика. Из сравнения с рис. 6 следует, что при

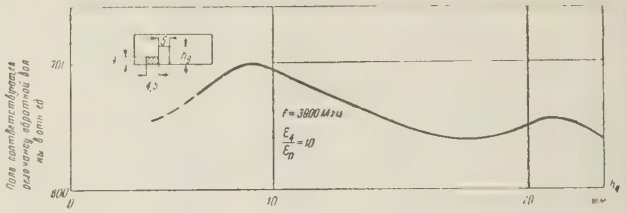


Рис. 7. Зависимость напряженности магнитного поля, соответствующего резонансу обратной волны, от высоты диэлектрика

полной высоте диэлектрика резонансное поле для обратной волны такое же, как и в случае чистого феррита. Уменьшение высоты диэлектрической пластины смещает резонанс обратной волны в область более сильных полей, при этом существует такая высота диэлектрика, при которой смещение резонансных частот наибольшее. В нашем примере $(h_д)_{опт} = 9$ *мм*. Оптимальная, в этом смысле, высота слоя зависит от параметров и размеров как диэлектрика, так и феррита.

Отметим также, что поле, при котором имеет место максимум поглощения прямой волны, с изменением высоты диэлектрика не менялось, оставаясь тем же, что и в случае чистого феррита.

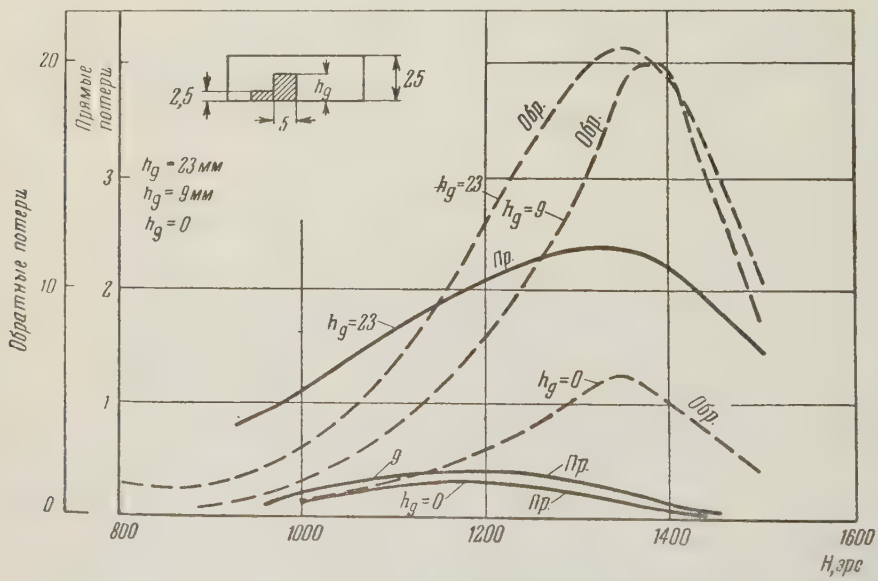


Рис. 8. Влияние дополнительного диэлектрического слоя на характер резонансного поглощения волны в феррите с намагниченностью насыщения 550 *гс*

Аналогичные эксперименты были проведены нами с ферритом ХМ-3, который, как отмечалось, имеет значительно меньшую намагниченность насыщения. При этом оказалось (рис. 8), что введение дополнительного диэлектрического слоя не смещает резонансное поле обратной волны. Более того, из кривых рис. 8 видно, что при увеличении высоты диэлектрической пластины наблюдается перемещение максимума потерь прямой вол-

ны, так что последний может совпадать с резонансом обратной волны. Вызвано это, видимо, тем, что структура поля волны внутри малоактивного феррита определяется действием только диэлектрика.

Таким образом, для получения значительного разноса резонансных частот прямой и обратной волн следует использовать ферриты с большой намагниченностью насыщения.

Описанное выше явление, заключающееся в возможности управления резонансными частотами прямой и обратной волн путем изменения размеров и параметров ферритовых и диэлектрических пластин, позволяет конструировать резонансные вентили с отношением затухания обратной волны к прямой, бо́льшим, чем это устанавливается формулой, которая выведена для очень тонких ферритов.

Эксперименты, результаты которых показаны на рис. 9, подтверждают этот вывод. С ферритом ХММ-1 вентильное отношение в момент максимального затухания обратной волны становится более 500, в то время как его «предельное» значение в отсутствие разноса резонансных полей прямой и обратной волн согласно (1) составляет величину примерно 400. Кроме того, надо учесть наличие диэлектрических потерь в феррите, которые для ХММ-1 имеют величину порядка $\varepsilon'' = 5 \cdot 10^{-3} \varepsilon_0$. Тогда предельное вентильное отношение равно примерно 300.

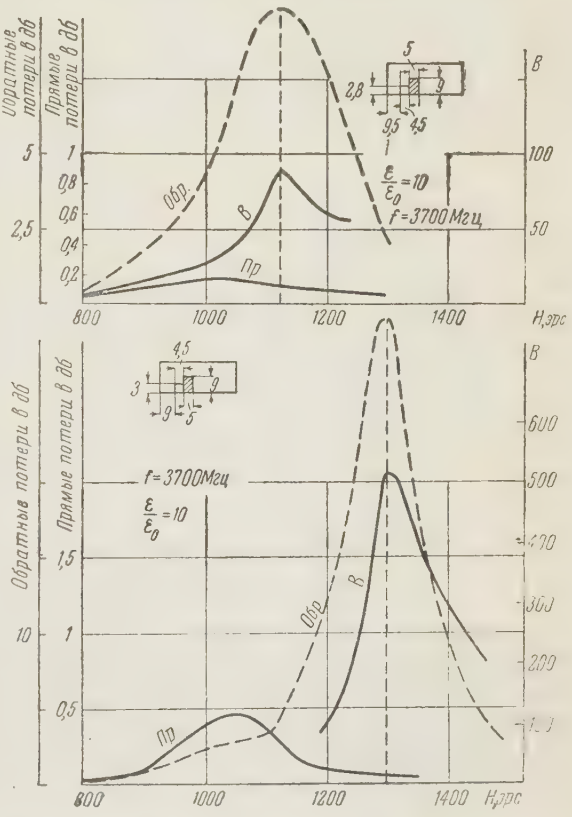


Рис. 9. Характеристики вентилей, выполненных на ферритах с намагниченностью насыщения 500 и 1050 *гс*

Таким образом, в эксперименте получено превышение затухания обратной волны над прямой почти вдвое больше того уровня, который до настоящего времени считался предельно возможным.

Для доказательства этого положения на рис. 9 нанесены кривые прямых и обратных потерь для феррита ХМ-3, у которого диэлектрик не смещает резонансное поле обратной волны. Как видим, вентильное отношение в этом случае достигает лишь 80. С точки же зрения теории, развитой для тонких пластин, эти ферриты должны давать одинаковое вентильное отношение, так как у них одинаковые факторы затухания ($\delta = 0{,}1$), величина же намагниченности насыщения феррита в отсутствие разноса имеет второстепенное значение.

Из сказанного ясно, что резкое увеличение вентильного отношения с ферритом ХММ-1 получено за счет разноса резонансных полей прямой и обратной волн. Это, в свою очередь, достигается использованием ферритов с большой намагниченностью и правильным выбором высоты феррита и диэлектрика.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕНТИЛЕЙ

Из разработанных на основе использования описанных выше явлений макетов вентилей рассмотрим здесь два, один из которых может быть использован в радиорелейных линиях для работы в диапазоне 8 *см*, а другой — в 3-*см* диапазоне волн.

В первом из макетов использован феррит марки ХММ-1. Размеры ферритовой и диэлектрической пластин были выбраны на основе описанных выше экспериментов таким образом, чтобы получить наибольший разнос резонансных частот прямой и обратной волн. Электрические характеристики вентиля, снятые в полосе частот, показаны на рис. 10.

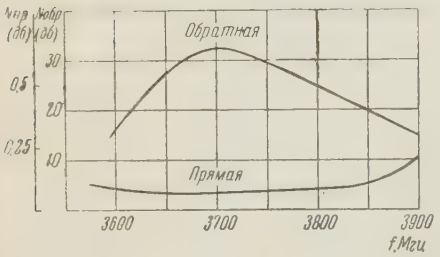


Рис. 10

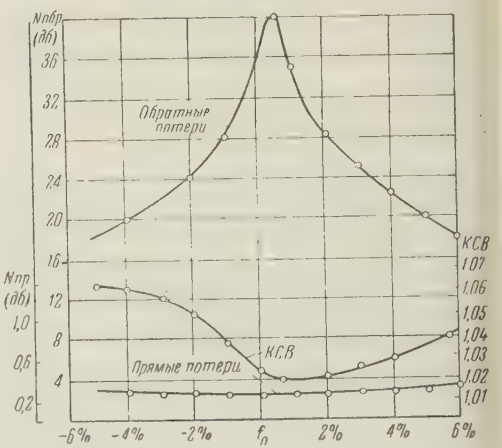


Рис. 11

Рис. 10. Частотная характеристика ферритового элемента

Рис. 11. Характеристика второго вентиля

На центральной частоте вентильное отношение более 500. Однако при отходе от средней частоты параметры вентиля резко ухудшаются и, следовательно, он может работать лишь в полосе частот 5—6%. Такое сужение рабочей полосы вентиля, по сравнению с обычными системами, вызвано тем, что с повышением частоты сильно возрастают прямые потери, так как мы приближаемся к той частоте, на которой имеет место резонанс прямой волны.

Во втором вентиле, предназначенном для работы в 3-*см* диапазоне, использован феррит НМ-2 [5], который имеет намагниченность насыщения 2300 *гс*.

В этом вентиле (с целью уменьшения линейных размеров вентиля) использованы две ферритовые пластины в паре со слоем диэлектрика, которые приклеиваются напротив друг друга к широким стенкам волновода. Размеры и положение ферритового элемента, как и в предыдущем случае, выбраны таким образом, чтобы получить наибольший разнос резонансных частот для прямой и обратной волн. Частотные характеристики вентиля представлены на рис. 11.

На центральной частоте вентильное отношение достигает 170, а в полосе частот 5% прямые потери не превышают 0,25 *дб* при обратных потерях не ниже 25 *дб*.

Этот вентиль, как и все системы, в которых ферриты размещены на проводящих стенках, может работать при высоких уровнях мощности.

Заметим, что не очень высокое значение вентильного отношения в этом макете связано с тем, что феррит НМ-2 имеет большие диэлектрические потери, в результате чего выигрыш, получающийся от разноса резонансных частот, в значительной степени уменьшается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные результаты показывают, что явление смещения резонансных полей для прямой и обратной волн может быть определенным образом усилено и использовано для значительного увеличения вентильного отношения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Микаэлян, А. К. Столяров, Радиотехника, 1957, 12, 10, 17.
2. А. К. Столяров, А. Л. Микаэлян, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 5.
3. M. T. Weiss, IRE Trans., 1956, 10, 240.
4. В. А. Фабриков, З. М. Гущина, В. Н. Васильев. Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 536.
5. В. А. Фабриков, В. Д. Кудрявцев, З. М. Гущина, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 10, 1299.

Поступила в редакцию
17 VIII 1959

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ФЕРРИТАХ НА СВЧ. Ч. II. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ФЕРРИТЕ

Я. А. Моносов

Параметрически связанные магнитостатические колебания ферритового образца, описанные в первой части работы (см. [1]), используются для объяснения нелинейных явлений в феррите на высоком уровне мощности. Показано, что уравнения для амплитуд колебаний в феррите совпадают с уравнениями для токов в конутрах, связанных через меняющиеся параметры. Получены формулы для амплитуд связанных колебаний, условий полной компенсации затухания связанных колебаний, полосы частот компенсации, ширины области дополнительного поглощения на частоте подкачки.

Ориентировочный подсчет по приведенным формулам показывает, что величина мощности подкачки, необходимой для полной компенсации затухания колебаний в ферритах гранатовой структуры ($2\Delta H \simeq 1$ *эрс*), имеет порядок 1 *вт*.

ВВЕДЕНИЕ

В [1] были рассмотрены длинноволновые электромагнитные колебания малого ферритового сфероида при воздействии подкачки. Было найдено в первом приближении относительно амплитуды подкачки совместное решение уравнений *

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{h} &= 0, \\ \operatorname{div}\vec{b} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{M}_\Sigma}{dt} = -|\gamma|[\vec{M}_\Sigma\vec{H}] \tag{2}$$

при граничных условиях магнитостатики и показано, что между магнитостатическими типами колебаний, частоты которых удовлетворяют соотношению

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \tag{3}$$

где ω_3 — частота подкачки, имеющих индексы

$$\left.\begin{aligned} n, &\quad n-2, \\ n, &\quad -(n-1), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

возникает параметрическая связь.

В настоящей статье мы используем результаты работы [1] для объяснения явления дополнительного поглощения в феррите и развития метода расчета характеристик феррита на высоком уровне мощности. Для этой цели воспользуемся аналогией между явлениями в феррите и в системе контуров, связанных через меняющиеся параметры. Теория параметрически связанных контуров в последнее время привлекает значительное внимание, и многие важные процессы в таких системах хорошо изучены [3, 4, 5], что в значительной степени облегчает нашу задачу. В частности, известно, что в таких контурах возможны генерация и усиление колебаний при очень малых собственных шумах.

Специфические особенности явлений в феррите будут отмечаться по ходу изложения.

* Обозначения см. в [1].

1. ВЫНУЖДЕННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫЕ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Воспользуемся уравнениями (43) работы [1] и несколько преобразуем их. Введем члены, учитывающие затухание колебаний в феррите, и возбуждающие потенциалы, играющие роль внешней силы, компенсирующей это затухание.

Затухание можно учесть в соответствии с известными методами [6], произведя в уравнениях (43) замену

$$H_{\text{внутр}} \to H_{\text{внутр}} + i\Delta H_n^*, \tag{5}$$

где ΔH_n — полуширина резонансной линии поглощения для данного типа колебаний.

Полагая далее $\Delta H_n \ll \frac{\omega_2}{|\gamma|} - H_{\text{внутр}}$, что в большинстве случаев хорошо оправдывается на практике, и $\frac{\omega_0\omega_M}{\omega_0^2-\omega_1^2} \neq 1 + \frac{z^2}{\alpha^2(1-z^2)}$ (где z — корни функции $P_n^{n-2}(z)$), можно разложить все функции в уравнениях (43) в ряды по $i\Delta H_n$ и ограничиться их первыми членами**. Эти члены будут описывать затухание колебаний в феррите. Возбуждающие потенциалы можно ввести, как известно (см., например, [7]), в правые части уравнений (43).

В соответствии со сказанным припишем к правым частям уравнений (43) работы [1] возбуждающие потенциалы в виде

$$\tau_{1,2}\, P_n^{m_{1,2}}(j\xi_0)\, P_n^{m_{1,2}}(\eta)\, e^{\pm\, im_{1,2}\varphi}$$

для частот ω_1 и ω_2 соответственно ($\tau_{1,2}$ — амплитуды возбуждающих потенциалов).

Проделав указанное и исключая неизвестные β_{1n} и β_{2n}, получим два уравнения для амплитуд колебаний в феррите α_{1n} и α_{2n}:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{1n}\left\{\alpha^2(n-2)k_1 + j\xi_{01}\frac{P_n'^{n-2}(j\xi_{01}')}{P_n^{n-2}(j\xi_{01}')} - j\xi_0\frac{Q_n'^{n-2}(j\xi_0)}{Q_n^{n-2}(j\xi_0)}\right\} + \\
&+ \alpha_{2n}^*\frac{m_0}{2}\sqrt{\mu_2}\left(\frac{1-\alpha^2\mu_1}{1-\alpha^2\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}n}\alpha^2\frac{4(2n-1)^2}{p_1+1}\left\{[(\mu_1-k_1-1)+\right. \\
&\left.+(\mu_2-k_2-1)]\left[\frac{p_1}{p_1+1} - \frac{p_2+1}{2\alpha^2(2n-1)}\frac{F_1}{\mu_1-\mu_2}\right] + (\mu_1-k_1-1)\right\} = \\
&= \tau_1 j\xi_0\left[\frac{Q_n'^{n-2}(j\xi_0)}{Q_n^{n-2}(j\xi_0)} - \frac{P_n'^{n-2}(j\xi_0)}{P_n^{n-2}(j\xi_0)}\right]\frac{P_n^{n-2}(j\xi_0)}{P_n^{n-2}(j\xi_{01}')}, \\
&\alpha_{2n}\left\{-\alpha^2(n-1)k_2 + j\xi_{02}\frac{P_n'^{n-1}(j\xi_{02}')}{P_n^{n-1}(j\xi_{02}')} - j\xi_0\frac{Q_n'^{n-1}(j\xi_0)}{Q_n^{n-1}(j\xi_0)}\right\} + \\
&+ \alpha_{1n}^*\frac{m_0}{2}\frac{\alpha^2\mu_1}{\sqrt{\mu_2}}\left(\frac{1-\alpha^2\mu_2}{1-\alpha^2\mu_1}\right)^{\frac{1}{2}n}\left\{2(n-1)(\mu_2-k_2-1) - \frac{1}{\mu_1\alpha^2}\times\right. \\
&\left.\times(\mu_1-k_1-1)\right\} = \tau_2 j\xi_0\left[\frac{Q_n'^{n-1}(j\xi_0)}{Q_n^{n-1}(j\xi_0)} - \frac{P_n'^{n-1}(j\xi_0)}{P_n^{n-1}(j\xi_0)}\right]\frac{P_n^{n-1}(j\xi_0)}{P_n^{n-1}(j\xi_{02}')},
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

* Символ «i», использован для обозначения мнимости в соответствии с методом комплексных амплитуд; символ «j» введен для обозначения сфероидальных координат.

** В тех случаях, когда указанные неравенства не выполняются, следует вычислить коэффициенты при действительных и мнимых частях функций в уравнениях (43), используя замену (5). Тогда коэффициенты при i будут описывать затухание.

где

$$p_1 = 2(n-1)\alpha^2\mu_1,$$

$$p_2 = 2(n-1)\alpha^2\mu_2.$$

Остальные обозначения см. в [1].

Далее введем в уравнения (6) замену (5) и вычислим действительную и мнимую части получившихся функций указанным выше способом. При этом для упрощения выкладок пренебрежем произведением малых $\Delta H \frac{m_0}{2}$. Тогда получим окончательно следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1n}(G_1\Delta H_1 - iF_1) - i\frac{m_0}{2}\alpha^*_{2n}F_3 &= i\tau_1 v_1, \\ \alpha_{2n}(G_2\Delta H_2 - iF_2) - i\frac{m_0}{2}\alpha^*_{1n}F_4 &= i\tau_2 v_2, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$G_{1,2} = \frac{\partial F_{1,2}}{\partial H} + F_{1,2}\frac{P_n^{'m_{1,2}}\left(j\xi'_{0_{1,2}}\right)}{P_n^{m_{1,2}}\left(j\xi'_{0_{1,2}}\right)} j\frac{\partial \xi'_{0_{1,2}}}{\partial H},$$

$$v_{1,2} = j\xi_0\left[\frac{Q_n^{'m_{1,2}}(j\xi_0)}{Q_n^{m_{1,2}}(j\xi_0)} - \frac{P_n^{'m_{1,2}}(j\xi_0)}{P_n^{m_{1,2}}(j\xi_0)}\right]\frac{P_n^{m_{1,2}}(j\xi_0)}{P_n^{m_{1,2}}\left(j\xi'_{0_{1,2}}\right)}.$$

К уравнениям (7) добавим аналогичное уравнение для колебания подкачки, с учетом влияния связанных магнитостатических колебаний.

Наиболее просто его получить, если собрать в уравнении (2) члены при временно́м множителе $e^{i\omega_3 t}$, приняв, что $|h_{3y}| \simeq |h_{3x}| = h_3$ и $|M_{3y}| \simeq |M_{3x}| = M_3$, и вычислить среднюю по объему образца мощность колебания подкачки $\int_{V_1} \vec{m}_3 \vec{h}_3 dv$. Тогда получим уравнение для колебания подкачки, приближенно (с точностью до величин второго порядка малости относительно амплитуды подкачки) учитывающее действие параметрически связанных магнитостатических колебаний на подкачку:

$$\frac{m_0}{2}\left[\Delta H_3 + i\left(\frac{\omega_3}{|\gamma|} - H_{\text{внутр}}\right)\right] + i\alpha_{1n}\alpha_{2n}q = ih_3, \tag{8}$$

где

$$q = \frac{1}{8\pi M_0}\frac{\int_{V_1} 4\pi\left(M_{x_2} + iM_{y_2}\right)h_{z_1}dv + \int_{V_1} 4\pi\left(M_{x_1} + iM_{y_1}\right)h_{z_2}dv}{v_\Phi};$$

$h_{z_{1,2}}$, $M_{x_{1,2}y_{1,2}}$ — продольное магнитное поле и намагниченность связанных типов колебаний на частотах ω_1 и ω_2 соответственно; v_Φ — объем ферритового образца.

Параметр q отличен от нуля лишь при условии, что $\int h_{z_{1,2}} 4\pi(M_{x_{2,1}} + iM_{y_{2,1}})dv \neq 0$ (ср. интеграл (29) в [1]). В [1] показано, что для типов магнитостатических колебаний, индексы которых определяются в соответствии с (4), это выполняется.

Таким образом, по уравнениям (7), (8) можно составить следующую картину явлений в феррите при воздействии поля подкачки: колебание подкачки создает параметрическую связь между магнитостатическими типами колебаний, частоты и индексы которых удовлетворяют усло-

Таблица 1

Параметрически связанные контуры	Феррит под воздействием сигнала большого уровня мощности на частоте ω_3
Вносимое сопротивление на частоте ω_1 [3]: $$R_{\text{вн}_1} = -\frac{\lvert I_3\rvert^2}{\lvert I_3\rvert^2_{\text{кр}}} R_1 \qquad (10')$$	Изменение ширины линии ферромагнитного резонанса $\delta(\Delta H_1)$ на частоте ω_1*: $$\delta(\Delta H_1) = -\frac{(m_0/2)^2}{(m_0/2)^2_{\text{кр}}} \Delta H_1 \qquad (10)$$ $\left(\frac{m_0}{2}\right)_{\text{кр}}$ определяется формулой (14) (см. ниже)
Абсолютное значение тока в первом контуре [3] (при $E_2 = 0$): $$\lvert I_1\rvert = \frac{E_1/R_1}{\sqrt{\left[1-\frac{\lvert I_3\rvert^2}{\lvert I_3\rvert^2_{\text{кр}}}\right]^2+\left[\frac{X_1}{R_1}-\frac{\lvert I_3\rvert^2}{\lvert I_3\rvert^2_{\text{кр}}}\frac{X^2}{R_2}\right]^2}} \qquad (11')$$	Амплитуда связанных магнитостатических колебаний при ($\tau_2 = 0$): $$\lvert\alpha_{1n}\rvert = \frac{\tau_1 v_1/G_1\Delta H_1}{\sqrt{\left[1-\frac{(m_0/2)^2}{(m_0/2)^2_{\text{кр}}}\right]^2+\left[\frac{F_1}{G_1\Delta H_1}-\frac{(m_0/2)^2}{(m_0/2)^2_{\text{кр}}}\frac{F_2}{G_2\Delta H_2}\right]^2}} \qquad (11)$$
Коэффициент усиления при резонансе [3]: $$Y_0^{1/2} = \left(1-\frac{\lvert I_3\rvert^2}{\lvert I_3\rvert^2_{\text{кр}}}\right)^{-1/2} \qquad (12')$$	Коэффициент компенсации затухания для связанных колебаний при ферромагнитном резонансе связанных колебаний: $$Y_0^{1/2} = \left[1-\frac{(m_0/2)^2}{(m_0/2)^2_{\text{кр}}}\right]^{-1/2} \qquad (12)$$
Уравнение для определения полосы частот при $Y = \frac{1}{2} Y_0$ [3]: $$\frac{X_1}{R_1}-\frac{\lvert I_3\rvert^2}{\lvert I_3\rvert^2_{\text{кр}}}\frac{X_2}{R_2} = 1-\frac{\lvert I_3\rvert^2}{\lvert I_3\rvert^2_{\text{кр}}} \qquad (13')$$	Уравнение для определения полосы частот и подмагничивающих полей при $Y = \frac{1}{2} Y_0$: $$\frac{F_1}{G_1\Delta H_1}-\frac{(m_0/2)^2}{(m_0/2)^2_{\text{кр}}}\frac{F_2}{G_2\Delta H_2} = 1-\frac{(m_0/2)^2}{(m_0/2)^2_{\text{кр}}} \qquad (13)$$
Условие полной компенсации затухания [3]: $$\lvert I_3\rvert^2_{\text{кр}} = \frac{R_1(R_2^2+X_2^2)}{\omega_1\omega_2 L^2 R_2} \qquad (14')$$	Условие полной компенсации затухания для связанных магнитостатических колебаний (критическая амплитуда подкачки)**: $$\left(\frac{m_0}{2}\right)_{\text{кр}} = \frac{(\Delta H_1\Delta H_2)^{1/2}}{4\pi M_0}\varkappa^{-1}\left[1+\left(\frac{F_2}{G_2\Delta H_2}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad (14)$$ где $\varkappa = \left(\frac{F_3F_4}{G_1G_2\left(\frac{\omega_M}{\gamma}\right)^2}\right)^{1/2}$
Уравнение для определения частот, соответствующих максимуму сопротивления, вносимого в третий контур, и генерируемых частот при $I_3 = I_{3\text{кр}}$ [5]: $$\frac{X_1}{R_1}-\frac{X_2}{R_2} = 0 \qquad (15')$$	Уравнение для определения подмагничивающих полей, соответствующих области дополнительного поглощения при $m_0/2 = (m_0/2)_{\text{кр}}$, и частот колебаний, для которых происходит компенсация затухания***: $$\frac{F_1}{G_1\Delta H_1}-\frac{F_2}{G_2\Delta H_2} = 0 \qquad (15)$$

* Формулы (10) — (15) остаются в силе при замене индексов по схеме $1 \rightleftarrows 2$.

** В [10] приводится формула для критической амплитуды подкачки, однако фактор F в этой формуле отличается от $\varkappa$ в (14) (см. также сноску в введении работы [1]).

*** Выражения (11), (13)—(15) несколько изменяются, если в уравнениях (7) учесть члены, пропорциональные $\nabla H \frac{m_0}{2}$.

виям (3) и (4), соответственно. В свою очередь, колебание подкачки испытывает обратную реакцию со стороны этих связанных магнитостатических колебаний.

Исследовав систему уравнений (7), (8), можно определить характеристики параметрически связанных магнитостатических колебаний и реакцию последних на колебание подкачки.

Весьма существенно отметить, что система уравнений (7), (8) математически подобна системе уравнений для токов в параметрически связанных контурах [3] (рис. 1), причем легко убедиться, что последние совпадают с уравнениями (7), (8) при следующей замене:

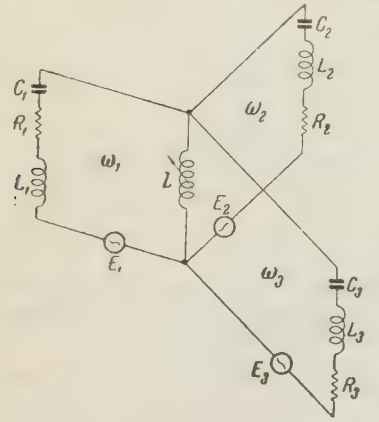


Рис. 1. Контуры, связанные через меняющийся параметр

$$\alpha_{1,2} \to I_{1,2}, \qquad \frac{m_0}{2} \to I_3,$$

$$i\tau_{1,2}v_{1,2} \to E_{1,2}, \qquad ih_3 \to E_3,$$

$$F_{1,2} \to X_{1,2}, \qquad \frac{\omega_3}{|\gamma|} - H_{\text{внутр}} \to X_3, \qquad (9)$$

$$G_{1,2}\,\Delta H_{1,2} \to R_{1,2}, \qquad \Delta H_3 \to R_3,$$

$$F_3 \to L\omega_1, \quad F_4 \to L\omega_2, \quad q \to L\omega_3,$$

где $I_{1,2,3}$ — токи, текущие в контурах *1*, *2*, *3* соответственно; $X_{1,2,3}$ — реактивные сопротивления контуров *1*, *2*, *3* соответственно.

Следовательно, можно воспользоваться формулами для контуров с параметрической связью и, произведя в них замену по формулам перехода (9), найти выражения для определения соответствующих характеристик явлений в феррите при воздействии поля подкачки. Некоторые полученные таким путем выражения сведены в табл. 1.

Приведенные формулы (10)—(15) позволяют рассчитать основные характеристики ферритового образца как колебательной системы со многими степенями свободы (пары типов колебаний с индексами $[n, n-2] \div [n, -(n-1)]$ при произвольном $n\gamma > 2$) при воздействии подкачки.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим характеристики связанных магнитостатических колебаний на частотах ω_1 и ω_2. Если $F_3F_4/G_1G_2 > 0$, то под действием поля подкачки ширина линии поглощения этих типов уменьшается (10) и амплитуда колебаний нарастает (11) тем значительней, чем ближе подкачка к критической.

Интересно отметить, что коэффициент компенсации затухания для всех типов связанных колебаний в точке резонанса (12) однозначно определяется отношением амплитуды подкачки к ее критической величине для данной пары типов.

При критической амплитуде подкачки (14) затухание для связанных колебаний оказываются полностью скомпенсированным. Следовательно, при подходящем возбуждении связанные типы могут быть использованы для усиления или генерации колебаний СВЧ.

Наряду с отмеченной аналогией между ферритом, находящимся под воздействием поля высокого уровня мощности СВЧ, и параметрически связанными контурами явления в феррите имеют свои специфические особенности.

Интересная особенность заключается в том, что магнитостатические колебания имеют как бы два элемента настройки, именно: частоту и подмагничивающее поле, причем условие для частот колебаний ω_1 и ω_2 (3) совпадает с таковым для параметрически связанных контуров, тогда как резонансные подмагничивающие поля свободны от каких-либо ограничений типа условия (3); поэтому при возникновении параметрической связи между типами колебаний в феррите резонансные магнитные поля и частоты могут претерпевать изменения, в известной мере аналогичные изменению резонансных частот связи в системе связанных контуров, по сравнению с парциальными частотами*. При этом выбором величины смещения частот колебаний можно регулировать величину смещения резонансных полей и наоборот.

Это отмечалось в [1], где показано, что величина смещения резонансных полей при сохранении частот колебаний, равными парциальным, соизмерима с шириной линии поглощения.

Резонансная кривая вынужденных параметрически связанных магнитостатических колебаний описывается выражением (11). В отсутствие затухания ($\Delta H_1 = \Delta H_2 = 0$) уравнение для определения максимумов амплитуды колебаний совпадает с уравнением (44) работы [1], в чем легко убедиться подстановкой значения $(m_0/2)_{кр}$ из (14) в знаменатель выражения (11).

Учет потерь существенно меняет дело. Теперь точки максимумов амплитуды колебаний определяются из уравнения

$$\frac{F_1}{G_1 \Delta H_1} - \frac{F_2}{G_2 \Delta H_2} \frac{(m_0/2)^2}{(m_0/2)^2_{кр}} = 0. \qquad (16)$$

Обратившись к выражению (11), можно заметить, что резонансная кривая параметрически связанных магнитостатических колебаний отличается от таковой для связанных радиотехнических контуров. Отличие заключается в том, что парциальное резонансное поле является также одним из резонансных полей связи, поскольку при $F_1 = F_2 = 0$ (условие для определения общего парциального резонансного поля) выражение (11) имеет максимум. В то же время известно, что в связанных радиотехнических контурах (см., например, [8]) их общая парциальная частота соответствует точке минимума резонансной кривой. Такое различие между рассматриваемыми системами объясняется разными знаками при вносимых затуханиях. В случае связанных радиотехнических контуров полное реактивное сопротивление обращается в нуль на парциальных частотах, но полное активное сопротивление при этом проходит через максимум.

В случае параметрически связанных колебаний в феррите полное затухание при парциальном резонансном поле минимально, поэтому резонансная кривая может иметь несколько максимумов, в том числе при парциальном резонансном подмагничивающем поле.

После этих замечаний перейдем к рассмотрению колебания подкачки.

Энергия подкачки расходуется на компенсацию затухания для параметрически связанных магнитостатических колебаний. При значениях подмагничивающего поля, удовлетворяющих уравнению (15), на частоте подкачки имеют место максимумы вносимого затухания, т. е. появляется заметное дополнительное поглощение, причем условием максимума является близость амплитуды подкачки к критической величине [5].

Определение подмагничивающего поля (H_{gn}), при котором имеет место дополнительное поглощение, можно наглядно истолковать графически.

* Не следует смешивать связанные контуры с параметрически связанными контурами, упоминавшимися выше. Известно [5], что в параметрически связанных контурах нормальные частоты совпадают с парциальными, если последние удовлетворяют условию (3).

Обратимся к рис. 2, где представлены построенные на основе результатов работы [2] кривые резонансных частот магнитостатических типов колебаний в функции подмагничивающего поля. Эти кривые определены из условия $F_{1,2} = 0$, т. е. для каждой выбранной пары типов все точки двух соответствующих кривых удовлетворяют уравнению (15). Для определения поля H_{gn} нужно учесть еще условие для частот (3), т. е. выбрать

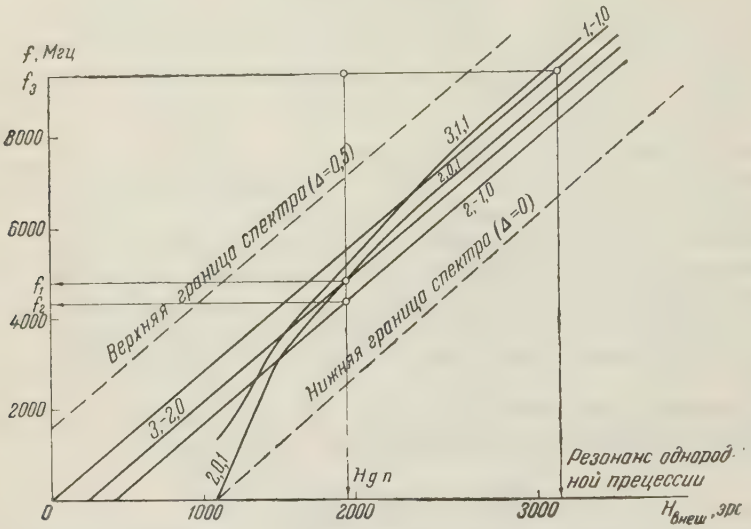


Рис. 2. Зависимость резонансной частоты некоторых типов магнитостатических колебаний от подмагничивающего поля ($\alpha = 1$ — сфера, $4\pi M_0 = 3200$ *гс*). Кривые отмечены индексами, соответствующими типу колебаний

на двух линиях такие точки, чтобы соответствующие им частоты удовлетворяли условию (3). На рис. 2 приведено вспомогательное построение для определения поля поглощения, создаваемого парой колебаний типов [2, 0, 1] и [2,—1,0].

Вертикаль, пересекающая линии 2, 0, 1 и 2,—1,0 в точках, где их ординаты удовлетворяют условию (3), отмечает на оси абсцисс поле дополнительного поглощения. Для сравнения на этом же рисунке приведено поле, соответствующее резонансу однородной прецессии на частоте ω_3. Оно находится на пересечении линии 1,—1,0 (однородная прецессия) и прямой $f = f_3 = \omega_3/2\pi$.

Заметим, что в соответствии с уравнением (15) указанная пара колебаний создает дополнительное поглощение также при других подмагничивающих полях и частотах ω_1 и ω_2, при которых $F_1 \neq 0$ и $F_2 \neq 0$.

Физическая сторона этого явления проясняется, если рассмотреть выражение для амплитуды связанных колебаний (11). Можно легко видеть, что при $m_0/2 = (m_0/2)_{кр}$ уравнение (15) совпадает с уравнением (16), т. е. определяет условие максимума амплитуды колебаний. Таким образом, при подмагничивающих полях и частотах, соответствующих резонансу связанных колебаний, и при достижении амплитудой подкачки порогового значения имеет место наибольшее поглощение энергии подкачки параметрически связанными колебаниями в феррите.

На рис. 3 приведены рассчитанные по формулам (14) и (8) кривые критического магнитного поля подкачки, соответствующего полной компенсации затухания для параметрически связанных колебаний типов [2,0] ÷ [2, —1], отнесенные к ширине линии поглощения $h_{зкр}/(\Delta H_1 \Delta H_2)^{1/2}$.

Кривые построены * в функции параметра формы образца $\alpha = b/a$ для различных намагниченностей насыщения феррита и при условии $F_1 = F_2 = 0$, т. е. соответствуют определенному выше (см. рис. 2) подмагничивающему полю H_{gn}. Кривые падают с ростом величины намагниченности примерно пропорционально последней на рассматриваемом участке и имеют неглубокий минимум при $\alpha \simeq 1{,}2$.

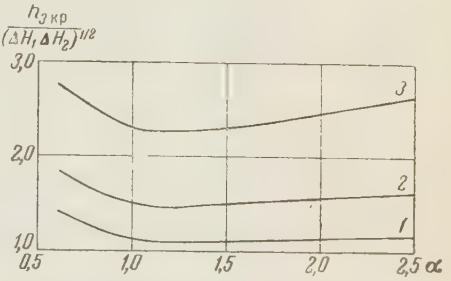


Рис. 3. Кривые зависимости критического магнитного поля подкачки для параметрически связанных колебаний типов [2,0]÷÷[2,—1] от формы образца для различных намагниченностей насыщения феррита:
1 — $4\pi M_0 = 4200$ *гс*; 2 — $4\pi M_0 = 3200$ *гс*; 3 — $4\pi M_0 = 2000$ *гс*. Частота подкачки $f_3 = 9300$ *Мгц*

Представляет интерес произвести оценку мощности поля подкачки, необходимой для возникновения дополнительного поглощения за счет потребления энергии рассмотренными выше типами параметрически связанных колебаний. Для этого воспользуемся полученным в [9] выражением для определения мощности колебаний P в резонаторе с ферритом через амплитуду магнитного поля, действующего на феррит:

$$P\,(вт) = \frac{\omega_3\,(Мгц)\,v_p\,(см^3)}{5{,}03 \cdot 10^8 Q}\,h^2\,(эрс), \qquad (17)$$

где v_p — объем резонатора; Q — добротность резонатора с ферритом на частоте ω_3.

Примем следующие значения параметров: $2\Delta H_1 = 2\Delta H_2 = 1$ *эрс*; $4\pi M_0 = 2000$ *гс*; $\omega_3 = 2\pi \cdot 9300$ *Мгц*; $v_p = 1 \times 2{,}3 \times 4{,}6$ *см*^{3} $= 10{,}6$ *см*^{3}; $Q = 2500$. Тогда получим $P = 700$ *мвт*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные выше результаты исследования позволяют развить последовательную количественную теорию явления дополнительного поглощения.

Феррит, находящийся под воздействием поля с большой амплитудой колебаний, может рассматриваться как система параметрически связанных магнитостатических колебаний, причем описывающие ее уравнения совпадают с таковыми для токов в контурах, связанных через меняющиеся параметры. Весьма существенно, что связь возникает лишь между парами тех типов магнитостатических колебаний, которые имеют индексы $[n, n-2]$ и $[n, -(n-1)]$. Собственные функции типов параметрически связанных колебаний представляют линейную комбинацию соответствующих собственных функций типов колебаний, описанных Уокером [2].

Математическое подобие уравнений для описания процессов в феррите на высоком уровне мощности и в параметрически связанных контурах позволяет в значительной степени использовать теорию последних для объяснения нелинейных явлений в ферритах. В частности, оказывается возможным вычислить критическую амплитуду подкачки для разных типов параметрически связанных колебаний; коэффициент компен-

* Расчеты производились А. Н. Дмитриенко. Таблицы расчетов к кривым рис. 3 приведены в Приложении.

сации затухания в функции амплитуды подкачки; полосу частот, в которой имеет место компенсация затухания; ширину области дополнительного поглощения; величину смещения резонансных частот и подмагничивающих полей для параметрически связанных колебаний.

Ориентировочная оценка мощности подкачки, необходимой для полной компенсации затухания для одного из типов параметрически связанных колебаний в феррите с очень узкими линиями поглощения (типа ферритов гранатовой структуры), дает величину порядка 1 *вт*.

Приношу глубокую благодарность А. А. Пистолькорсу за внимание к работе и весьма полезное обсуждение.

Приложение

К РАСЧЕТУ КРИТИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОДКАЧКИ

Расчет производился по формуле

$$\frac{h_{3\,\text{кр}}}{(\Delta H_1 \Delta H_2)^{1/2}} = \left(\frac{\omega_3}{|\gamma|} - H_{\text{внутр}}\right) \frac{1}{\varkappa \omega_M} \qquad \text{(I)}$$

которая легко получается при подстановке в формулу (14) выражения для $m_0/2$ из (8). При этом в выражении (8) опущен, как малая второго порядка, член, пропорциональный произведению $\alpha_1\alpha_2$, и учтено, что для рассматриваемых случаев выполняется неравенство $\Delta H_3 \ll \frac{\omega_3}{|\gamma|} - H_{\text{внутр}}$ (ср. соответствующие столбцы в приведенных ниже таблицах). В формуле (14), как уже указывалось, принято, что $F_1 = F_2 = 0$.

При расчете оказывается удобным вычислять не отдельно каждую из величин, указанную в формуле (14), а некоторые их комбинации. Так, например, произведение F_3F_4 оказывается более простым, чем каждая из этих функций в отдельности.

$$F_3F_4 = 2(2n-1)\alpha^2 \left\{[(\mu_1 - k_1 - 1) + (\mu_2 - k_2 - 1)]\left[-\frac{p_1}{p_1+1} - \frac{p_2+1}{2\alpha^2(2n-1)}\frac{F_1}{\mu_1 - \mu_2}\right] + \right.$$
$$\left. + (\mu_1 - k_1 - 1)\right\}\left\{(\mu_2 - k_2 - 1)\frac{p_1}{p_1+1} - \frac{1}{p_1+1}(\mu_1 - k_1 - 1)\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Величины G_1 и G_2 (см. (7)) при условии $F_1 = F_2 = 0$ упрощаются и принимают вид

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial H} = -\frac{\alpha^2}{4\pi M_0}\frac{\omega_M^2}{(\omega_0+\omega_1)^2}\frac{[\alpha^2\mu_1(1-z^2)+z^2](n-2)+2z^2\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2+1\right]}{[\alpha^2\mu_1(1-z^2)+z^2]^2}\Big/\left(1-\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 \\ G_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial H} = -\frac{\alpha^2}{4\pi M_0}\frac{(n-1)\,\omega_M^2}{(\omega_2-\omega_0)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Результаты промежуточных расчетов для членов, входящих в формулу (14), приведены в табл. 1′, 2′, 3′, соответствующих различным значениям намагниченности насыщения феррита.

Таблица 1′

$4\pi M_0 = 2000$ *гс*

α	$\frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{4\pi M_0}{\alpha^3}$	$\frac{\partial F_2}{\partial H}\frac{4\pi M_0}{\alpha^3}$	$\frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{\partial F_2}{\partial H}\left(\frac{4\pi M_0}{\alpha}\right)^2$	$\frac{F_3F_4}{\alpha^2}$	$\varkappa$	$\frac{\omega_3}{\lvert\gamma\rvert} - H_i$	$\frac{h_{3\,\text{кр}}}{(\Delta H_1 \Delta H_2)^{1/2}}$
0,6	98,4	70,7	2505	196,5	0,28	1540	2,75
0,8	114	36	2620	245	0,306	1530	2,5
1,0	126	25	3150	342	0,329	1510	2,3
1,25	157	18	4400	480	0,33	1500	2,26
1,4	176	14,9	5150	552	0,327	1500	2,29
1,67	221	12	7390	751	0,319	1495	2,35
2,5	452	8,75	24700	1940	0,28	1485	2,65

Таблица 2′

$4\pi M_0 = 3200$ *гс*

α	$\frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{4\pi M_0}{\alpha^2}$	$\frac{\partial F_2}{\partial H}\frac{4\pi M_0}{\alpha^2}$	$\frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{\partial F_2}{\partial H}\left(\frac{4\pi M_0}{\alpha}\right)^2$	$\frac{F_3F_4}{\alpha^2}$	$\varkappa$	$\frac{\omega_3}{\lvert\gamma\rvert} - H_i$	$\frac{h_{3\text{кр}}}{(\Delta H_1 \Delta H_2)^{1/2}}$
0,6	129	70,7	3280	196	0,245	1435	1,83
0,8	154	36	3540	255	0,269	1390	1,62
1,0	186	25	4660	371	0,282	1350	1,49
1,25	238	18	6700	545	0,285	1330	1,45
1,4	275	14,9	8030	631	0,280	1325	1,47
1,67	353	12	11750	865	0,271	1320	1,52
2,5	745	8,75	40600	2390	0,243	1270	1,63

Таблица 3′

$4\pi M_0 = 4200$ *гс*

α	$\frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{4\pi M_0}{\alpha^2}$	$\frac{\partial F_2}{\partial H}\frac{4\pi M_0}{\alpha^2}$	$\frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{\partial F_2}{\partial H}\left(\frac{4\pi M_0}{\alpha}\right)^2$	$\frac{F_3F_4}{\alpha^2}$	$\varkappa$	$\frac{\omega_3}{\lvert\gamma\rvert} - H_i$	$\frac{h_{3\text{кр}}}{(\Delta H_1 \Delta H_2)^{1/2}}$
0,6	162	70,7	4110	196	0,218	1310	1,43
0,8	234	36	5400	266	0,222	1240	1,33
1,0	240	25	6000	402	0,259	1160	1,07
1,25	334	18	9380	605	0,254	1140	1,07
1,4	397	14,9	11600	724	0,25	1130	1,08
1,67	528	12	17600	1020	0,241	1120	1,11
2,5	1190	8,75	65100	2975	0,214	1050	1,17

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Моносов, К теории нелинейных явлений в ферритах на СВЧ. Ч. I. Параметрические связанные магнитостатические колебания в феррите при воздействии подкачки, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 59.
2. L. R. Walker, Magnetostatic modes in ferromagnetic media, Phys. Rev., 1957, 105, 2, 390.
3. S. Bloom., K. K. N. Chang, Theory of parametric amplification using nonlinear reactances, RCA Rev., 1957, 18, 4, 578.
4. H. Hefner, G. Wade, Gain, band width and noise characteristics of the variable-parametric amplifier, J. Appl. Phys., 1958, 29, 9, 1321.
5. В. И. Зубков, Я. А. Моносов, Некоторые вопросы теории параметрических усилителей, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 75.
6. Г. Сул, Л. Уокер, Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах, ИЛ, 1955.
7. R. A. Waldron, Theory of the measurement of the permeability tensor of a ferrite, Inst. El. Eng. Conv. on Ferrites, 1956, 29, 2.
8. Н. Н. Крылов, Теоретические основы радиотехники, Изд. Морской транспорт, 1953.
9. Я. А. Моносов, А. В. Вашковский, Экспериментальное исследование нелинейных явлений в ферритах на СВЧ, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 105.
10. H. Suhl, Theory of the ferromagnetic microwave amplifier, J. Appl. Phys., 1957, 28, 11, 1225.

Поступила в редакцию
13 VI 1959

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЕРРИТОВОГО УСИЛИТЕЛЯ

В. П. Тычинский, Ю. Т. Деркач, В. В. Карпецкий

Исследована работа ферритового усилителя СВЧ в электромагнитном режиме. Описаны схема экспериментальной установки, методика настройки усилителя, индикация усиления и генерации. В процессе работы обнаружен и исследован новый эффект, заключающийся в том, что насыщение основного резонанса феррита не приводит к быстрому «замораживанию» угла прецессии. Это позволяет снизить требования, предъявляемые к ферритовому элементу устройства.

Измеренное значение усиления составило около 22 *дб* при рабочих мощностях возбуждения порядка 5 *квт*.

Предложена и реализована удобная схема для исследования фазовых характеристик усилителя. Полученные результаты согласуются с данными, опубликованными другими авторами, и подтверждают параметрический принцип работы ферритового усилителя.

Предложенный Сулом [1] метод усиления СВЧ-колебаний в системах, содержащих ферриты, был впервые осуществлен Вейсом [2, 3], а в последующем — и другими авторами [4, 5]. Теоретическое и экспериментальное исследования ферритового усилителя подтвердили параметрический принцип работы этого устройства и послужили стимулом для работ по параметрическим усилителям с нелинейными элементами, отличными от ферритов.

В течение последнего года созданы параметрические усилители на полупроводниковых диодах [6—8] и электронно-лучевых приборах [9, 10], допускающие работу с низкими пороговыми значениями мощности возбуждения.

Несмотря на появление указанных «конкурентов», ферритовые усилители по-прежнему представляют интерес ввиду разнообразия режимов работы, далеко не полностью исследованных в настоящее время, а также благодаря возможности работать при больших уровнях входной мощности.

Следует также отметить, что применение иттриевых ферригранатов вместо обычных ферритов позволяло снижать мощность возбуждения ферритовых усилителей до нескольких десятков ватт [3], причем в перспективе возможно и более значительное снижение мощности возбуждения.

В упомянутых выше кратких заметках [2—5] не приводились подробные сведения о характеристиках и условиях работы ферритового усилителя, методике его настройки и т. д. Целью настоящей статьи является сообщение о некоторых результатах исследования ферритового усилителя в вырожденном электромагнитном режиме, подобного описанному Вейсом [2].

Блок-схема измерительной установки показана на рис. 1. Источником мощности возбуждения служил импульсный магнетрон, уровень проходящей мощности от которого контролировался термисторным мостом с калиброванными аттенюаторами. Сигнал с выхода моста использовался в установке полуавтоматической записи (УПЗ) для регистрации спектра поглощения мощности в феррите на частоте возбуждения, а в процессе работы

усилителя — для контроля настройки ферритового элемента на резонанс и для отсчета уровня мощности возбуждения.

Источником усиливаемого сигнала служил клистронный генератор, манипулированный импульсами. Импульсная манипуляция использовалась для контроля отсутствия импульса возбуждения в цепи сигнала и для грубой оценки коэффициента усиления по отношению амплитуд импульсов. Сигнал от клистронного генератора через коаксиальную измерительную линию поступал на вход ферритового усилителя, на выходе которого последовательно располагались коаксиальный фильтр нижних частот, обладающий затуханием на частоте возбуждения около 50 *дб*, детекторная головка и широкополосный импульсный усилитель. Индикация сигнала осуществлялась при помощи импульсного осциллографа. При необходимости производилась запись сигналов генерации и усиления с выхода детекторной головки или включенного вместо нее термисторного моста.

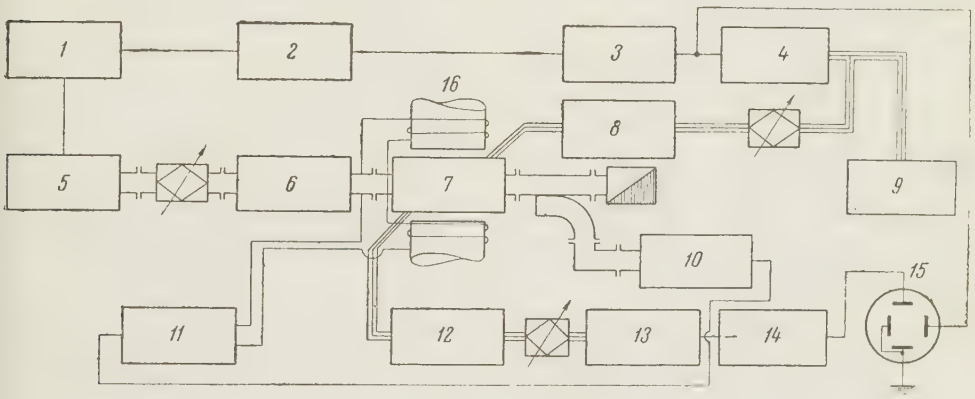


Рис. 1. Блок-схема измерительной установки:

1 — модулятор; *2* — генератор импульсов; *3* — генератор импульсов; *4* — клистронный блок; *5* — магнетрон; *6* — измеритель КСВ; *7* — ферритовый усилитель; *8* — измерительная линия; *9* — анализатор спектра; *10* — измеритель мощности; *11* — установка полуавтоматической записи; *12* — фильтр низких частот; *13* — детектор; *14* — широкополосный усилитель; *15* — осциллограф; *16* — электромагнит

Синхронизация импульсного модулятора магнетрона, манипуляция клистронного генератора и запуск развертки импульсного осциллографа осуществлялись от генератора импульсов.

Методика настройки усилителя состояла в следующем: в интервале рабочих магнитных полей снималась кривая настройки полоскового полуволнового резонатора $f_{рез} = F(H_0)$, обусловленная влиянием намагниченности ферритовых дисков на резонансную волну резонатора. Затем магнетрон настраивался на удвоенную частоту резонатора $f_м = 2\, f_{рез}$ и производилась точная установка магнитного поля H_0 по минимуму проходящей мощности, что соответствовало основному ферромагнитному резонансу на частоте возбуждения.

На рис. 2 показаны зависимости, которые контролировались при настройке ферритового усилителя: *а* — кривая настройки резонатора магнитным полем; *б* — зависимость проходящего сигнала клистрона от магнитного поля при фиксированной частоте; *в* — кривая поглощения мощности в феррите при основном ферромагнитном резонансе на частоте возбуждения. Кривые типа *б* снимались методом проходящего сигнала при модуляции постоянного магнитного поля от сети 50 *гц* и с индикацией на низкочастотном осциллографе, также синхронизованном от сети.

Ширина резонансной кривой рис. 2, *б* связана с нагруженной добротно-

стью простым соотношением

$$Q_н = \frac{f_{рез}}{\delta H \left(\frac{\delta f}{\delta H}\right)_{H_0}}. \qquad (1)$$

Измерения добротности резонатора в действующем макете усилителя производились на основании соотношения (1).

При настройке полоскового резонатора в области малых магнитных полей амплитуда проходящего сигнала изменялась в соответствии со спектром поглощения видов неоднородной прецессии. Образцы записи этого спектра на УПЗ показаны на рис. 3. Было установлено, что при использовании тонких ферритовых дисков с намагниченностью насыщения порядка 3000—4000 *гс* спектр видов неоднородной прецессии на частоте сигнала располагался значительно ниже рабочего магнитного поля H_0, что служило гарантией электромагнитного режима работы.

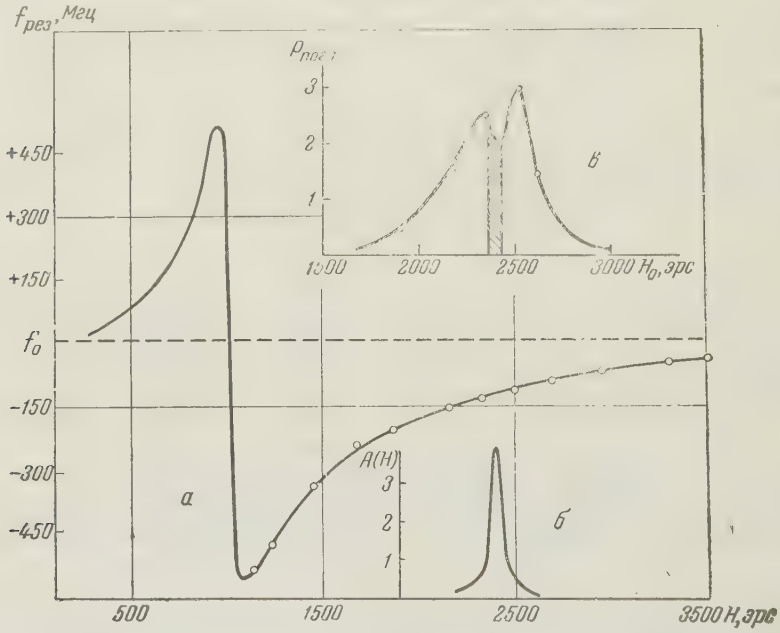


Рис. 2. Графики настройки СВЧ-системы ферритового усилителя:

а — зависимость $f_{рез}$ полоскового резонатора от магнитного поля H_0; *б* — кривая настройки полоскового резонатора на частоте сигнала; *в* — кривая поглощения мощности на частоте возбуждения

Контроль за соблюдением соотношения частот сигнала и возбуждения $f_м = 2f_{рез}(H_0)$ легко осуществлялся при помощи анализатора спектра, на экране которого при точной настройке совпадают положения спектров магнетрона и второй гармоники клистрона.

Для эффективного возбуждения усилителя от магнетрона потребовалось изучить характеристики поглощения мощности в системе на частоте возбуждения. Типичные кривые показаны на рис. 4 и 5. На рис. 4 представлена кривая поглощения на клистронном уровне мощности, снятая при помощи чувствительного детектора и обнаруживающая тонкую структуру спектра поглощения. При повышении мощности, начиная с некоторого уровня, имеет место монотонное уширение резонансной линии поглощения в феррите $2\Delta H$ и падение магнитной восприимчивости феррита χ''. Результаты обработки серии кривых рис. 5 приведены на графике рис. 6. Отчетливо виден порог мощности $P_{пор} = 1$ *квт*.

Ожидалось, что выше порога не произойдет заметного увеличения угла прецессии намагниченности ϑ [11]. Однако эксперимент доказал

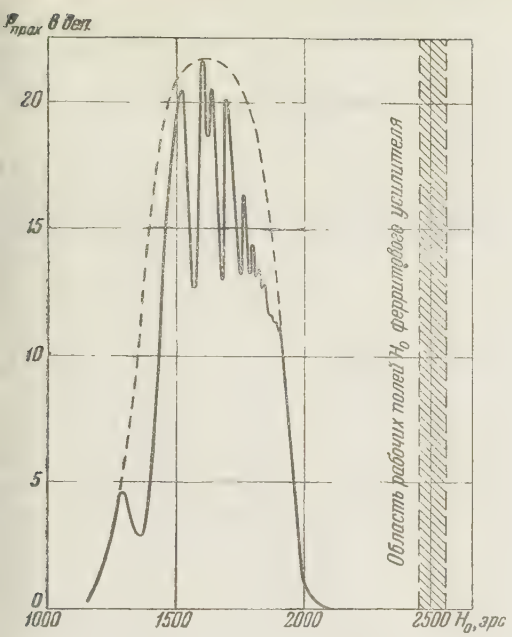


Рис. 3. Спектр видов неоднородной прецессии на частоте сигнала

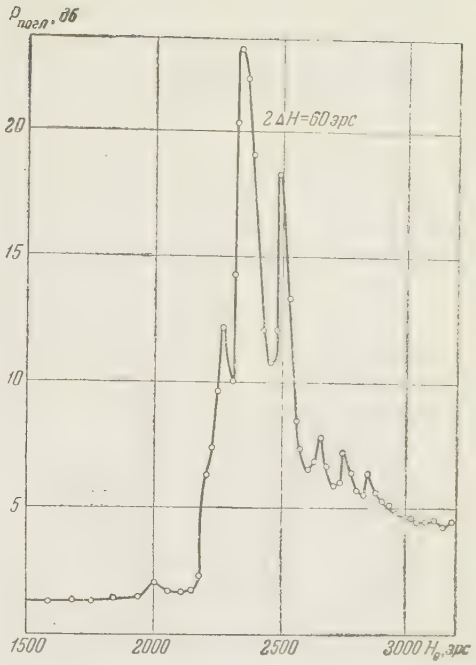


Рис. 4. Кривая поглощения мощности в феррите на частоте возбуждения (клистронный уровень)

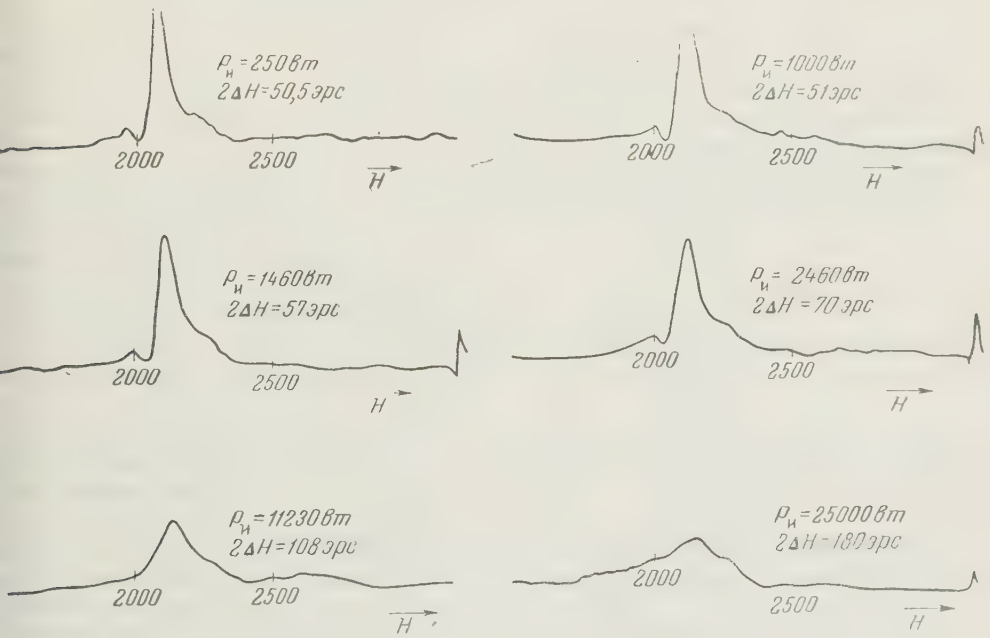


Рис. 5. Кривые поглощения мощности в феррите на частоте возбуждения (магнетронный уровень) (диск 3,8 × 1 *мм*)

обратное. Типичный график рис. 7 показывает, что угол прецессии θ, вычисленный по формуле

$$\theta = \frac{h}{2\Delta H} \simeq \frac{0{,}103\sqrt{P}}{2\Delta H},$$

возрастает выше порога в 2,5 раза. Указанное явление позволило выбирать рабочую точку усилителя по мощности заведомо выше порога, при кото-

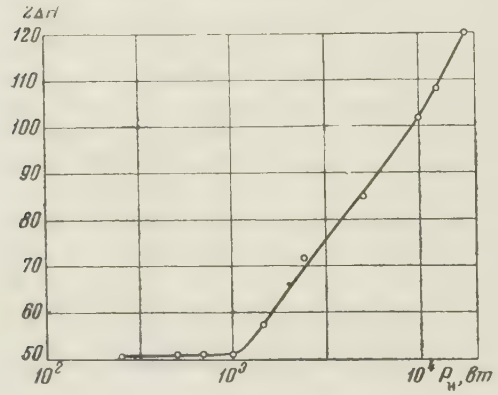


Рис. 6

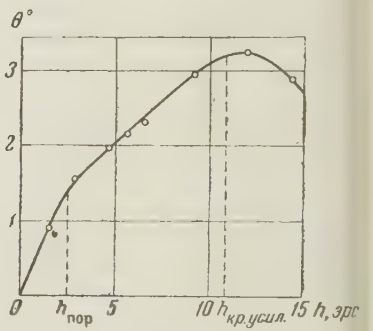


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость ширины линии ферромагнитного резонанса $2\Delta H$ от уровня мощности возбуждения $P_{возб}$ (диск $3{,}8 \times 1$ *мм*, $P_{ср} = 0{,}125$ *вт*)

Рис. 7. Насыщение угла прецессии θ намагниченности феррита

ром наблюдалось расширение резонансной кривой, снизив тем самым требования к ферритовому элементу устройства.

Наблюдение эффекта усиления производилось главным образом по проходящему сигналу.

Проходящий от клистронного генератора импульс в течение времени воздействия мощного импульса от магнетрона приобретал выброс, показанный на рис. 8. Методы контроля позволили установить, что указанный выброс не связан с действием наводок или прямого прохождения мощности возбуждения, а является импульсом с частотой $f_{сигн}$.

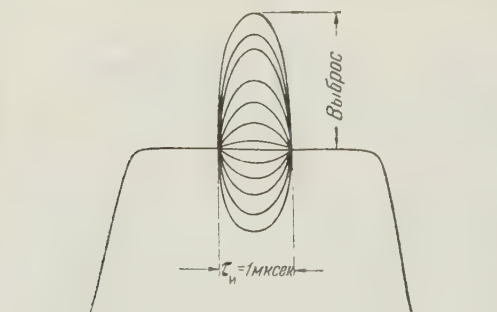


Рис. 8. Импульс усиленного сигнала на экране осциллографа

Взаимная синхронизация фазы колебаний клистрона и магнетрона отсутствовала, поэтому имело место изменение огибающей выброса в пределах, показанных на рис. 8. При изменении частоты клистрона в обе стороны от $f_м/2$ частота колебаний огибающей выброса увеличивалась, а амплитуда оставалась пропорциональной амплитуде импульса клистрона.

Начиная с некоторой мощности $P_{кр}$, выброс существовал независимо от сигнала клистрона, т. е. имела место импульсная генерация. Длительность выброса была несколько меньше длительности импульса тока магнетрона. Амплитуда импульса генерации монотонно росла с увеличением мощности, интервал рабочих магнитных полей при этом расширялся. При увеличении $P_{возб}$ происходил также рост оптимальной величины

магнитного поля $H_{опт}$. При $P > P_{кр}$, наряду с генерацией, можно было также наблюдать усиление, причем оптимальные магнитные поля для усиления были несколько выше таковых для генерации.

Измерение коэффициента усиления производилось по калиброванному аттенюатору стандарта сигнала. «Холодное» затухание в системе, измеренное методом замещения в отсутствие возбуждения, оказалось равным порядка 9 *дб*. При мощности возбуждения около 3 *квт* происходила компенсация холодных потерь, затем следовали быстрый рост усиления и самовозбуждение при 4,85 *квт*.

Зависимость коэффициента усиления и полосы на уровне 3 *дб* от мощности возбуждения показана на рис. 9. Измеренный коэффициент усиления мощности составил около 22 *дб* при мощности входного сигнала порядка микроватт и мощности возбуждения около 4,7 *квт*.

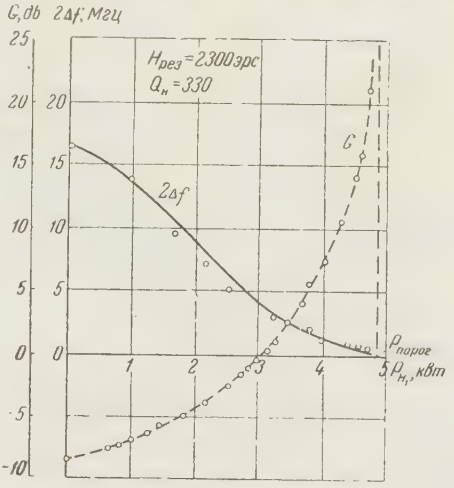


Рис. 9. Зависимость усиления G и ширины полосы $2\Delta f$ от мощности возбуждения $P_{возб}$

В режиме генерации при изменении частоты возбуждения происходит смещение оптимального магнитного поля в соответствии с требованием $f_{возб} = 2f_{рез}(H_0)$. На плоскости f, H область генерации имеет вид «эллипсов», смещенных относительно кривой настройки резонатора $f_{возб}/2 = F(H_0)$ (рис. 10). Некоторое смещение эллипсов при повышении мощности возбуждения может быть объяснено изменением M_z за счет повышения температуры феррита и роста угла прецессии намагниченности θ.

Ферритовые образцы, использованные при исследованиях усилителя, были вырезаны из монокристаллов марганцевого феррита нестехиометрического состава (с избытком марганца) и имели форму дисков с диаметром 5—6 *мм* и толщиной 0,8—1 *мм*. Ширина линии резонанса, измеренная на малых сферах при низком уровне мощности, составляла для данного материала 40—45 *эрс*.

Для доказательства параметрического механизма работы ферритового усилителя был поставлен следующий опыт.

Один из макетов ферритового усилителя работал в режиме генерации и служил импульсным источником сигнала на частоте $f_м/2$, синхронизированным с магнетроном.

Второй макет прибора питался от того же магнетрона и работал в недовозбужденном режиме в качестве усилителя сигнала первого прибора (см. блок-схему рис. 11).

При изменении фазы φ усиливаемого сигнала на входе усилителя наблюдалось периодическое изменение выходной мощности, показанное на рис. 12. Аналогичная зависимость была получена при изменении фазы сигнала возбуждения.

Этот опыт подтверждает параметрический характер усиления и справедливость основных положений параметрической теории ферритового усилителя. Из серии кривых $G(P_{возб}, \varphi)$ можно получить значения эквивалентного параметра возбуждения $\varepsilon(P)$ и произвести количественную проверку теории.

Экспериментальное исследование макетов ферритового усилителя позволяет сделать некоторые предварительные выводы.

1. Экспериментально подтверждено, что ферритовые усилители регенеративного типа с сосредоточенными постоянными обладают относительно узкой полосой частот (<0,1%), убывающей с ростом усиления.

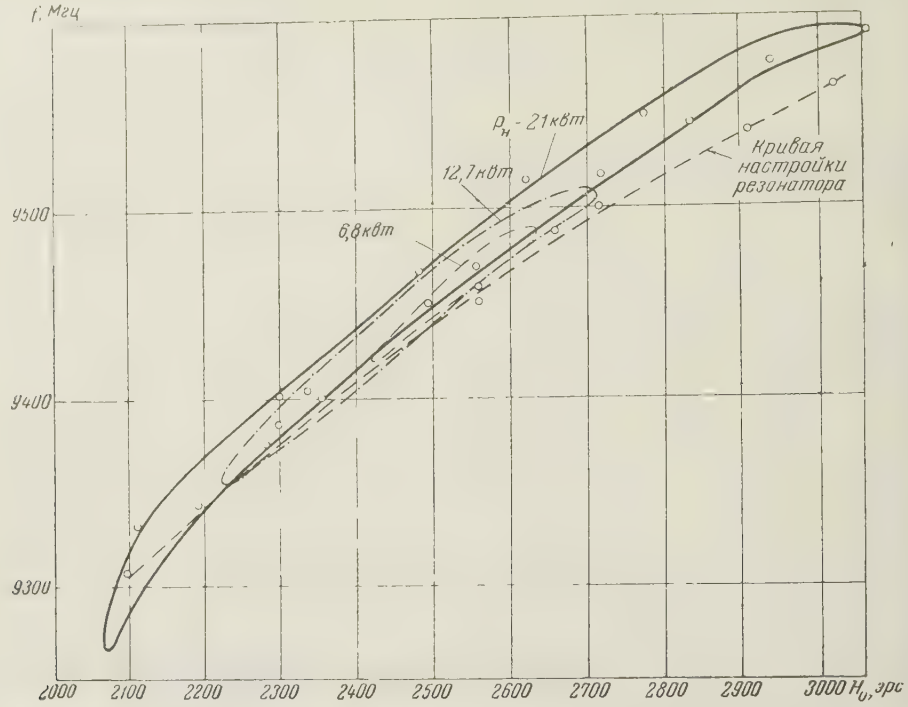


Рис. 10. Области генерации ферритового генератора при различных уровнях мощности возбуждения (2 диска ϕ 6 *мм*, толщина 1 *мм*)

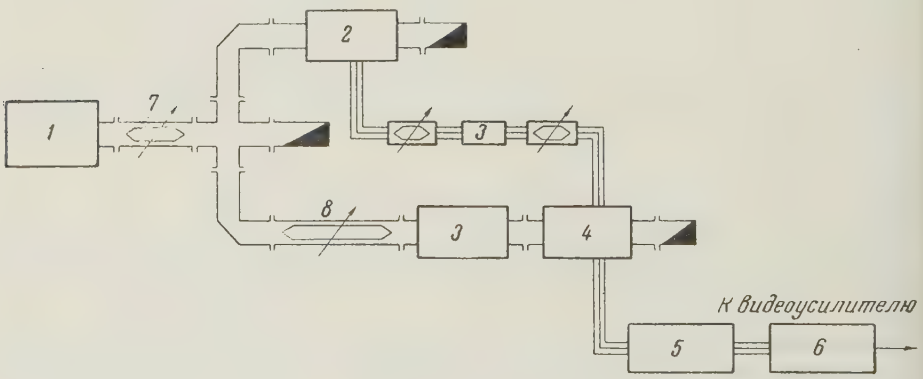


Рис. 11. Блок-схема установки для измерения фазовых соотношений:

1 —магнетрон; *2* — ферритовый генератор; *3* — фазовращатель; *4* — ферритовый усилитель; *5* — фильтр; *6* — детектор, *7*, *8* — аттенюаторы

2. Сравнительно высокие пороговые мощности и неблагоприятные условия охлаждения ферритовых элементов вынуждают к импульсному режиму работы при сравнительно высокой скважности. Переход к непрерывному режиму может быть обеспечен за счет снижения $P_{возб}$ улучшением условий охлаждения.

3. Рассмотренный режим работы усилителя ($f_{сигн} = f_м/2$) характеризуется фазовой зависимостью усиления (см. рис. 12). Переход к работе в невырожденном случае электромагнитного режима, а также использование полустатического режима [3, 5] устраняют этот недостаток усилителя.

4. Параметрическая теория ферритового усиления указывает на принципиальную возможность работы при частоте возбуждения, меньшей частоты усиливаемого сигнала $f_{\text{сигн}} = \frac{n}{2} f_{\text{возб}}$ при $n > 2$, что соответствует высоким номерам областей неустойчивости уравнения Матье. Однако этот путь снижения частоты возбуждения, по-видимому, не представляет практического интереса, так как его реализация потребует значительного увеличения возбуждения.

Указанные в литературе другие методы снижения частоты возбуждения, в частности [12], не проверены экспериментально, поэтому отчетливых перспектив снижения частоты возбуждения сейчас еще нет, и работа ферритовых усилителей осуществляется пока в первой области $f_{\text{сигн}} \simeq f_{\text{возб}}/2$. В заключение выражаем глубокую благодарность А. А. Поповой, предоставившей нам монокристаллы ферритов для эксперимента.

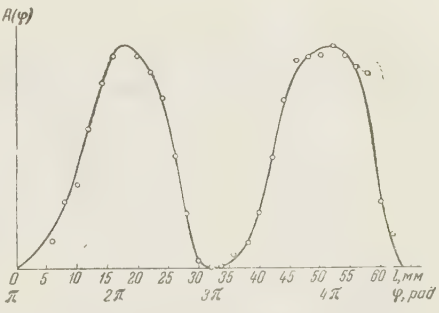


Рис. 12. Фазовая зависимость амплитуды усиленного сигнала

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Suhl, Proposal for a ferromagnetic amplifier in the microwave range, Phys. Rev., 1957, **106**, 2, 384.
2. M. T. Weiss, A solid-state microwave amplifier and oscillator using ferrites, Phys. Rev., 1957, **107**, 1, 317.
3. M. T. Weiss, A solid-state amplifier and oscillator using ferrites, J. Appl. Phys., 1958, **29**, 3, 421.
4. W. L. Whirry, F. B. Wang, Phase dependence of a ferromagnetic microwave amplifier, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 9, 1657.
5. A. D. Berk, L. Kleinmann, E. E. Nelson, Modified semistatic ferrite amplifier, IRE Convent. Rec., 1958, 2, august, 9.
6. H. Heffner, K. Kotzebue, Experimental characteristics of a microwave parametric amplifier unsing a semiconductor diode, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 6, 1301.
7. R. S. Engelbrecht, A low-noise nonlinear-reactance travelling-wave amplifier, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 9, 1655.
8. G. F. Hermann, M. Uenohara, A. Uhlir, Noise figure measurements on two types of variable reactance amplifiers using semiconductor diodes, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 6, 1301.
9. T. J. Bridges, A parametric electron beam amplifier, Proc. I. R.E., 1958, **46**, 2, 494.
10. R. Adler, Parametric amplification of the fast electron wave, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 6, 1300.
11. H. Suhl, The nonlinear behavior of ferrites at high microwave signal levels, Proc. I. R. E., 1956, **44**, 10, 1270.
12. C. L. Hogan, R. L. Jensen, P. H. Vartanian, New type of ferromagnetic amplifier, J. Appl. Phys., 1958, **29**, 3, 422.

Поступила в редакцию
16 IV 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 2

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Ф. В. Бункин

Формулируется общая задача о параметрической регенерации квантовых систем. Рассмотрен конкретный пример регенерации спиновой системы.

1. Принцип работы квантовых усилителей заключается, как известно, в том, что помещенное внутрь резонатора рабочее вещество находится в состоянии отрицательного поглощения, в результате чего в резонаторе осуществляется регенерация.

Применительно к непрерывным режимам работы таких усилителей получили распространение два способа, при помощи которых достигается состояние отрицательного поглощения: 1) метод сортировки молекул пучка по уровням в квадрупольном конденсаторе (усилители на пучке) и 2) метод двойного резонанса (парамагнитные усилители).

Эти способы имеют одно принципиальное различие. В первом источником энергии является нагретый объем газа, в то время как во втором способе таким источником является высокочастотное (вспомогательное) электромагнитное излучение. Таким образом, в первом случае мы имеем дело с своеобразной тепловой машиной, усиливающей (или вырабатывающей в случае генерации) электромагнитную энергию, а во втором случае, если пользоваться терминологией классической теории колебаний,— с параметрической регенерацией.

Есть все основания думать, что тот способ параметрической регенерации, который осуществляется в трехуровневых усилителях, представляет собой весьма частный, но может быть один из наиболее эффективных способов параметрической регенерации квантовых систем.

В общей постановке задачу о параметрической регенерации квантовых систем, по-видимому, целесообразно поставить следующим образом.

2. Пусть задана некоторая квантовая система, которая обладает достаточно интенсивными (дипольными) переходами в интересующей нас области частот, т. е., с формальной точки зрения, ее невозмущенный гамильтониан H_0 имеет боровские частоты $\omega_{kn} = (E_k - E_n)/\hbar$, находящиеся в этой области частот. Ставится вопрос: каким должно быть внешнее переменное воздействие на данную систему, для того чтобы она, будучи помещенной в резонатор, настроенный на интересующую нас частоту, осуществляла в нем регенерацию, т. е. излучала энергию на этой частоте, а не поглощала ее.

В трехуровневом усилителе таким внешним воздействием является вспомогательное излучение на переходе $1 \leftrightarrow 3$, а резонатор настроен либо на переход $1 \leftrightarrow 2$, либо на переход $2 \leftrightarrow 3$. Характерной особенностью такого способа воздействия является то, что как вспомогательное, так и основное поле — резонансные (т. е. их частоты совпадают с соответствующими боровскими частотами невозмущенного гамильтониана H_0). Но требование резонансности не является необходимым. Более того, можно указать на целый ряд систем, где метод двойного резонанса не применим вообще. Это, во-первых, так называемые двухуровневые системы, т.е. такие системы, гамильтониан H_0 которых имеет только одну боровскую

частоту ω_{21} в интересующей нас области частот. В качестве другого примера такого рода систем назовем осциллятор, энергетический спектр которого образует, как известно, эквидистантную «лестницу», и метод двойного резонанса здесь ничего не дает.

3. Поскольку всякое регулярное внешнее воздействие на микросистему может быть, по-видимому, только электромагнитным воздействием, то сформулированная выше задача о параметрической регенерации квантовых систем с точки зрения общей теории излучения представляет собой задачу о так называемых процессах излучения второго порядка. При этом в процессе излучения участвуют два кванта, вообще говоря, разной энергии, один из которых поглощается, а другой излучается. Примерами такого рода процессов являются: эффект Комптона, комбинационное рассеяние света, резонансная флюоресценция и др.

4. Дадим более точную формулировку требований параметрической регенерации. Предположим, что резонатор настроен на частоту ω. Тогда полный гамильтониан системы, находящейся под внешним переменным воздействием и взаимодействующей с электромагнитным полем $\mathbf{F}$ резонатора, имеет вид

$$H(t) = H_0(t) - \mathbf{pF}\cos\omega t, \tag{1}$$

где $\mathbf{p}$ — оператор дипольного момента системы; $H_0(t)$ — гамильтониан «свободного» движения системы, т. е. в отсутствие взаимодействия с полем резонатора *. Знание гамильтониана дает возможность вычислить среднее значение дипольного момента системы:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = Sp\rho\mathbf{p}, \tag{2}$$

где ρ — матрица плотности системы, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H(t), \rho] + \frac{\delta\rho}{\delta t}. \tag{3}$$

Член $\delta\rho/\delta t$ определяет изменение матрицы плотности вследствие различного рода релаксационных процессов в системе. Например, если рассматриваемой системой является спин парамагнитного иона, то упомянутыми релаксационными процессами являются процессы спин-спиновой и спин-решеточной релаксаций.

В отсутствие эффектов анизотропии средний дипольный момент $\langle \mathbf{p} \rangle$ может быть представлен в виде

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle_1 + \mathrm{Re}\,\mathbf{F}(\varkappa' - i\varkappa'')\, e^{i\omega t}. \tag{4}$$

В такой записи выделена гармоническая составляющая на частоте ω, зависящая от амплитуды поля $\mathbf{F}$ и соответствующая индуцированным переходам в этом поле. Член $\langle \mathbf{p} \rangle_1$ описывает изменение $\langle \mathbf{p} \rangle$ на частотах, отличных от ω, а также, вообще говоря, ту часть этого изменения на частоте ω, которая не зависит от амплитуды поля $\mathbf{F}$. В общем случае спектр частот функции $\langle \mathbf{p} \rangle_1$ более богатый, чем тот, который содержится в гамильтониане «свободного» движения $H_0(t)$. Очевидно, что на «дополнительных» частотах система должна всегда излучать энергию, что находится в полной аналогии с явлением спонтанного излучения обычных стационарных систем.

Регенерация может осуществляться, как известно, за счет второго члена правой части (4), а именно она наступает тогда, когда мнимая часть поляризуемости системы $\varkappa'' < 0$.

5. Рассмотрим сейчас простейший пример двухуровневой системы — спин 1/2 в магнитном поле — и покажем, что в такой системе возможны

* Здесь мы предполагаем, что размеры системы малы по сравнению с длиной волны.

режимы параметрической регенерации. Пусть спин $s = 1/2$ находится в однородном магнитном поле $\mathcal{H}_0$ (вдоль оси z) и двух высокочастотных полях $H_1 \cos\omega_1 t$ и $2H_2\cos\omega_2 t$, причем первое направлено вдоль постоянного поля $\mathcal{H}_0$, а второе перпендикулярно ему (направлено вдоль оси x). Полный гамильтониан спина, взаимодействующего со всеми этими тремя полями, имеет вид

$$H(t) = H_0 + V(t), \tag{5}$$

$$H_0 = -\mu\mathcal{H}_0\sigma_z, \tag{6}$$

$$V(t) = -\mu H_1 \cos\omega_1 t\sigma_z - \mu 2H_2 \cos\omega_2 t\sigma_x, \tag{7}$$

где $\mu = \gamma\hbar/2$ — величина магнитного момента (γ — гиромагнитное отношение); σ_x и σ_z — матрицы Паули. Уравнение (3) для матрицы плотности ρ_{mn} в представлении, в котором H_0 диагонален, приобретает вид

$$\dot{\rho}_{11} = -\frac{i}{\hbar}(V_{12}\rho_{21} - \rho_{12}V_{21}) - \frac{\rho_{11} - \rho_{11}^0}{T_1},$$

$$\dot{\rho}_{22} = -\frac{i}{\hbar}(V_{21}\rho_{12} - \rho_{21}V_{12}) - \frac{\rho_{22} - \rho_{22}^0}{T_1}, \tag{8}$$

$$\dot{\rho}_{21} = -i\left(\omega_0 + \frac{V_{22} - V_{11}}{\hbar}\right)\rho_{21} - i\frac{V_{21}}{\hbar}(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\rho_{21}}{T_2}, \tag{9}$$

где $\omega_0 = \gamma\mathcal{H}_0 = 2\mu\mathcal{H}_0/\hbar$ — частота зеемановского расщепления; T_1 и T_2 — времена спин-решеточной и спин-спиновой релаксаций; ρ_{11}^0 и ρ_{22}^0 — равновесные значения диагональных элементов.

На основании (7) для V_{mn} получаем

$$V_{22} = -V_{11} = \mu H_1 \cos\omega_1 t,\ V_{12} = V_{21} = -2\mu H_2 \cos\omega_2 t. \tag{10}$$

Если ввести новые переменные согласно соотношениям

$$\Delta(t) = \rho_{11} - \rho_{22},\quad \Delta^0 = \rho_{11}^0 - \rho_{22}^0, \tag{11}$$

$$\rho_{21} = \sigma_{21}(t)\, e^{-i\omega_0 t}\, e^{-i\alpha\sin\omega_1 t},\ \sigma_{12} = \sigma_{21}^*,\ \alpha = \frac{\gamma H_1}{\omega_1}, \tag{12}$$

то на основании (8) — (12) имеем

$$\dot{\Delta} = -\frac{\Delta - \Delta^0}{T_1} + 2i\gamma H_2 \cos\omega_2 t\,(\sigma_{21}e^{-i\omega_0 t}e^{-i\alpha\sin\omega_1 t} - \sigma_{12}e^{i\omega_0 t}e^{i\alpha\sin\omega_1 t}), \tag{13}$$

$$\dot{\sigma}_{21} = -\frac{\sigma_{21}}{T_2} + i\gamma H_2 \cos\omega_2 t e^{i\omega_0 t}e^{i\alpha\sin\omega_1 t}\Delta. \tag{14}$$

Рассмотрим прежде всего тот случай, когда продольное поле с частотой ω_1 является вспомогательным. Действие этого поля, очевидно, сводится к модуляции частоты зеемановского расщепления, и поэтому здесь можно ожидать достижения параметрической регенерации при частоте модуляции ω_1, более низкой, чем частота сигнала (в данном случае частота ω_2).

Предположим, что выполнены условия

$$n\omega_1 \simeq \omega_0 + \omega_2,\quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\omega_1 T_2 \gg 1,\quad |\omega_0 - \omega_2| T_2 \gg 1. \tag{15}$$

Тогда решение уравнений (13) и (14) имеет вид

$$\Delta = \frac{\Delta^0}{1 + [\gamma H_2 J_n(-\alpha)]^2 T_1 T_2 [1 + T_2^2 (n\omega_1 - \omega_0 - \omega_2)^2]^{-1}}, \tag{16}$$

$$\sigma_{21} = i \frac{\gamma H_2}{2} T_2 J_n(-\alpha) \frac{\Delta \exp[-i(n\omega_1 - \omega_0 - \omega_2) t]}{1 - iT_2 (n\omega_1 - \omega_0 - \omega_2)}. \tag{17}$$

Из последнего выражения для Δ видно, что в рассматриваемом случае эффектом насыщения можно пренебречь, когда выполнено условие

$$\gamma^2 H_2^2 J_n^2(\alpha) T_1 T_2 \ll 1, \tag{18}$$

отличающееся от условия отсутствия насыщения при обычном парамагнитном резонансе множителем $J_n^2(\alpha)$ (см., например, [1]). Поскольку всегда $|J_n(\alpha)| < 1$, а сигнал (амплитуда $2H_2$) предполагается слабым, будем считать условие (18) выполненным и поэтому будем писать $\Delta = \Delta^0$. Для x-компоненты среднего магнитного момента спина имеем

$$\langle \mu \rangle_x = \mu S p \rho \sigma_x = 2\mu \operatorname{Re} \rho_{21}. \tag{19}$$

Нас интересует гармоническая составляющая $\langle \mu \rangle_x$ на частоте ω_2, которая на основании (12), (16) и (19) может быть представлена в виде

$$\mu\gamma H_2 T_2 J_n^2(\alpha) \Delta^0 \operatorname{Re} \frac{ie^{i\omega_2 t}}{1 - iT_2 (n\omega_1 - \omega_0 - \omega_2)} = \operatorname{Re}(\chi' - i\chi'') 2H_2 e^{i\omega_2 t}. \tag{20}$$

Для вещественной χ' и мнимой χ'' частей магнитной восприимчивости на частоте ω_2 отсюда получаем

$$\chi'_{\omega_2} = \frac{1}{2} \chi_0 \omega_0 T_2 J_n^2(\alpha) \frac{T_2 (\omega_2 + \omega_0 - n\omega_1)}{1 + T_2^2 (\omega_2 + \omega_0 - n\omega_1)^2}, \tag{21}$$

$$\chi''_{\omega_2} = -\frac{1}{2} \chi_0 \omega_0 T_2 J_n^2(\alpha) \frac{1}{1 + T_2^2 (\omega_2 + \omega_0 - n\omega_1)^2} \tag{22}$$

где $\omega_0 = \gamma \mathcal{H}_0$; $\chi_0 = \mu \Delta^0$, $\mathcal{H}_0$ — статическая восприимчивость. Таким образом, при выполнении условий (15) мнимая часть действительно оказывается отрицательной при сколь угодно низкой частоте модуляции $\omega_1 = (\omega_0 + \omega_2)/n$. Это в свою очередь позволяет утверждать, что в рассмотренной системе в принципе возможна параметрическая регенерация с частотой вспомогательного излучения более низкой, чем частота усиливаемого сигнала.

Вопрос о практическом осуществлении такой системы будет рассмотрен ниже. Сейчас же будет приведено выражение для χ''_{ω_1} на частоте ω_1 в том случае, когда в качестве вспомогательного излучения выбрано поперечное поле с частотой

$$\omega_2 \simeq (\omega_0 + \omega_1), \quad \omega_1 T_2 \gg 1.$$

Этот случай был рассмотрен Джаваном [2]. Решение уравнений (13) и (14) применительно к этому варианту дает

$$\chi''_{\omega_1} = -\frac{1}{2} \chi_0 \omega_0 T_2 \left(\frac{\gamma H_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{1}{1 + T_2^2 (\omega_1 + \omega_0 - \omega_2)^2}. \tag{23}$$

6. Формальное различие выражений для χ''_{ω_2} (формула (22)) и χ''_{ω_1} (формула (23)) сводится лишь к различному виду множителей $J_n^2(\gamma H_1/\omega_1)$

и $(\gamma H_2/\omega_1)^2$, отличающих χ''_{ω_2} и χ''_{ω_1} от соответствующего блоховского выражения для χ'' при обычном парамагнитном резонансе [1]. По существу же два этих случая различаются тем, что во втором из них частота вспомогательного излучения $\omega_2 \simeq (\omega_0 + \omega_1)$ и, таким образом, всегда больше частоты сигнала ω_1.

Возможность практического использования обоих рассмотренных случаев параметрической регенерации для создания усилителей на СВЧ можно оценить, исходя из сравнения выражений (22) и (23) с соответствующим выражением для χ'' на частоте усиления в трехуровневых парамагнитных усилителях. Можно считать, что в этих усилителях осуществляется полная инверсия населенности пары уровней, соответствующей основному переходу, и, следовательно, для таких усилителей выражение для χ'' отличается от наших χ''_{ω_2} и χ''_{ω_1} множителями порядка $J_n^2(\gamma H_1/\omega_1)$ и $(\gamma H_2/\omega_1)^2$, которые на СВЧ практически всегда много меньше единицы. Последнее, однако, не означает, что вопрос о практическом осуществлении предлагаемых вариантов является совершенно безнадежным. Дело в том, что в данном случае мы не связаны требованием достижения насыщения по вспомогательному переходу, которое в трехуровневых усилителях при заданной мощности источника вспомогательного излучения ограничивает сверху возможное значение концентрации парамагнитного вещества, т. е. значение величины $\chi_0 T_2$; поэтому мы можем выбрать максимально возможное значение величины $\chi_0 T_2$ при одном условии, чтобы ширина линии $\Delta\omega \sim 1/T_2$ не оказалась слишком узкой. Практически такое максимальное значение, по-видимому, на один-два порядка превышает те значения величины $\chi_0 T_2$, которые имеют место в современных парамагнитных усилителях, работающих с источником вспомогательного излучения мощностью в несколько десятков милливатт. Однако, по-видимому, даже при таком «запасе» в величине $\chi_0 T_2$ для осуществления регенерации потребуются примерно такие же мощности вспомогательного излучения (по порядку величины), какие используются в современных ферромагнитных усилителях, т. е. десятки киловатт. Необходимость в столь высоких мощностях вспомогательного излучения по сравнению с трехуровневыми усилителями объясняется нерезонансным характером внешнего воздействия. В этом смысле рассмотренные случаи параметрической регенерации являются неоптимальными. Последнее, однако, не дает повода для отказа от поисков новых методов параметрического возбуждения квантовых систем.

Автор признателен А. М. Прохорову за обсуждение рассмотренных в статье вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Эндрю, Ядерный магнитный резонанс, ИЛ, 1957.
2. A. Javan, J. Phys. et radium, 1958, 19, 806.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
3 IV 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1960 № 2

ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ ДВУХЭЛЕКТРОДНЫЙ ПРИБОР С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ*

М. А. Берг, С. А. Гарянов

Рассматривается двухэлектродный полупроводниковый прибор $p-n-p$-типа с отрицательным сопротивлением на вольтамперной характеристике. Выведено приближенное аналитическое выражение для вольтамперной характеристики этого прибора. Показано, что для получения отрицательного сопротивления необходимо наличие двух источников изменения проводимости прибора, охваченных положительной обратной связью. Приведен ряд схем, в которых может использоваться этот прибор.

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы появились работы, посвященные вопросам конструирования и использования многоэлектродных приборов с отрицательным сопротивлением (ОС), в основе появления которого лежит явление лавинообразного умножения числа носителей заряда в $p-n$-переходе, к которому приложено обратное напряжение. Такие приборы могут найти широкое применение в генераторных, усилительных и переключающих схемах, а также в счетно-решающих устройствах. В связи с этим представляют известный интерес простейшие двухэлектродные приборы, вольтамперная характеристика которых имеет участок с ОС. Этому вопросу в литературе посвящен ряд работ. Один из таких приборов описан, например, в [1]. Однако вследствие специфики процессов, приводящих к появлению ОС, этот прибор может нормально работать только при температурах ниже $-30 \div -50$°С. Кроме того, параметры такого прибора сильно зависят от температуры, что в значительной степени ограничивает его практическое использование.

Известны также работы, посвященные созданию полупроводниковых приборов, имеющих многопереходную структуру типа $p-n-p-n$ [2—4] и $n^+-p-i-p^+$ [5]. Изготовление такого рода приборов является сложной технологической задачей.

Наиболее простой способ изготовления прибора с ОС предложен в [6], где описан опытный образец точечно-контактного германиевого диода с ОС на прямой ветви вольтамперной характеристики. В качестве электрода использовалась серебряная проволока с небольшим количеством донорной примеси. ОС появлялось после электрической формовки большими токами. При нашей попытке воспроизвести такого рода прибор оказалось, что участок ОС имелся на прямой и обратной ветвях вольтамперной характеристики, причем более устойчивый участок получался на обратной ветви. Есть основания считать, что под контактом получалась структура типа $n-p-n$ [7].

Естественно было предположить, что и плоскостные двухэлектродные структуры $n-p-n$- и $p-n-p$-типов должны иметь на вольтамперной характеристике участок с ОС. В [8] имеется упоминание о том, что несимметричные двухэлектродные структуры $p-n-p$- и $n-p-n$-типов при

* Результаты работы доложены на 2-й Научно-технической конференции по применению полупроводниковых приборов в приборостроении, октябрь 1958 г., Москва.

определенных условиях действительно имеют ОС, однако подробного анализа процессов, приводящих к появлению ОС, не было сделано. Ниже приведены результаты предварительного исследования двухэлектродных приборов $p-n-p$-типа, полученных методом вплавления индия в электронный германий. Описан возможный механизм возникновения ОС в этих приборах, получено приближенное аналитическое выражение для вольтамперной характеристики и приведены некоторые сведения о работе этих приборов в ряде радиотехнических схем.

1. ВОЗМОЖНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОЯВЛЕНИЮ ОС В ДВУХЭЛЕКТРОДНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРАХ

Обычно в полупроводниковых двухэлектродных приборах появление ОС бывает связано с увеличением проводимости по мере возрастания протекающего через них тока. Математически ОС для таких приборов может быть записано следующим образом:

$$R^{(-)} = \frac{-\partial U}{\partial I} \simeq \frac{-\Delta U}{\Delta I}. \qquad (1)$$

Знак минуса перед ΔU означает, что на участке ОС вольтамперной характеристики напряжение уменьшается с ростом тока, т. е. проводимость прибора растет. В полупроводниках значительное увеличение проводимости возможно вследствие увеличения числа носителей заряда [9,10]. Для создания двухэлектродного полупроводникового прибора с ОС наиболее подходящим оказывается механизм увеличения числа носителей заряда вследствие ударной ионизации в $p-n$-переходе, подробно изученный рядом авторов [11—15]. Это явление принято характеризовать коэффициентом умножения

$$M = \left[1 - \left(\frac{U}{U_{\text{В}}}\right)^n\right]^{-1}, \qquad (2)$$

где $U_{\text{В}} = a\rho^k$ — напряжение пробоя, величина, постоянная для данного полупроводника и слабо зависящая от температуры [14], ρ — удельное сопротивление материала. По данным [12] и [13] $a = 88$, $k = 0{,}64$. Для электронного германия $n = 3$, а для дырочного $n = 4{,}5 \div 6{,}5$ [11], т. е. ударная ионизация в электронном германии начинается при меньшем напряжении, чем в дырочном; поэтому в полупроводниковых приборах, использующих явление умножения числа носителей заряда, целесообразно использовать электронный германий.

Однако получить ОС, используя один $p-n$-переход и механизм умножения числа носителей заряда в нем, не представляется возможным, так как появление ОС должно быть связано с регенеративным процессом, развитие которого возможно только при наличии положительной обратной связи внутри прибора.

Для получения ОС необходимо, чтобы в приборе находилось не менее двух источников увеличения проводимости, связанных между собой сильной положительной обратной связью по току так, чтобы увеличение проводимости прибора за счет первого источника вызывало бы ответное увеличение проводимости за счет второго источника.

В качестве первого источника можно использовать $p-n$-переход с умножением в нем.

В качестве второго источника могут служить: 1) тепловая генерация носителей заряда, связанная с разогревом толщи полупроводникового прибора при протекании через нее тока большой плотности; 2) второй $p-n$-переход, инжекция носителей заряда из которого должна возрастать с током, и др.

В первом случае ОС будет обязана своим происхождением совместному действию ударной ионизации и термической генерации, как это имеет ме-

сто, например, в германиевых точечно-контактных диодах ДГЦ4÷ДГЦ12. Эти приборы имеют заметную инерционную нелинейность, а их параметры сильно зависят от температуры, что исключает использование этих приборов в высокочастотном диапазоне.

Во втором случае между обоими p—n-переходами должна существовать сильная положительная обратная связь по току.

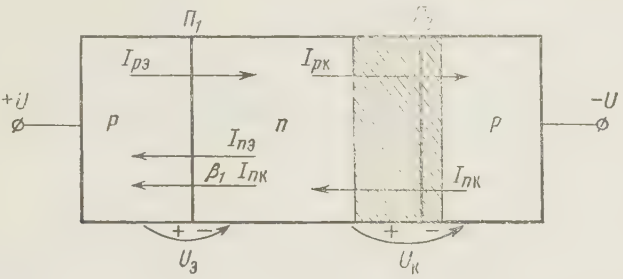


Рис. 1. Структура p—n—p-типа

Помимо увеличения числа носителей заряда в результате ударной ионизации в одном из p—n-переходов начальное возрастание тока может происходить вследствие: а) светового воздействия; б) действия эффекта Зинера; в) тока смещения от внешнего источника питания; г) неидеальности p—n-перехода, к которому приложено обратное напряжение.

Ниже будет показано, что указанные выше условия могут быть созданы в полупроводниковой структуре p—n—p-типа, представленной на рис. 1.

Для начального возрастания тока в такой системе использовано явление умножения как наиболее удобное для практической реализации.

При указанной на рис. 1 полярности внешнего напряжения переход $П_1$ (называемый далее эмиттером) смещен в прямом направлении, а переход $П_2$ (называемый коллектором) — в обратном. При напряжении ниже некоторого критического значения $U_{кр}$, при котором начинается ударная ионизация, через p—n—p-структуру протекает ток порядка тока насыщения коллектора.

Электроны, поступающие со стороны коллектора, заряжают базу отрицательно, понижая ее потенциал. Это приводит к росту дырочного тока через эмиттер. Отношение приращения полного тока, протекающего через такую структуру, к приращению электронного тока коллекторного перехода равно

$$\frac{\partial I}{\partial I_{пк}} = \alpha_э^* = \frac{1 - \alpha_0\beta_1}{1 - \alpha_0}, \qquad (3)$$

где $\alpha_0 = \gamma\beta_2$; $\beta_2 = \dfrac{\partial I_{рк}}{\partial I_{рэ}}$ — коэффициент переноса дырок от эмиттера к коллектору; $\gamma = \dfrac{I_{рэ}}{(I_{рэ} + I_{пэ})}$ — эффективность эмиттера; β_1 — коэффициент переноса электронов от коллектора к эмиттеру. Здесь α_0 и β_1 меньше единицы, поэтому $\alpha_э^*$ больше единицы. $I_{рэ}$, $I_{пэ}$, $I_{рк}$, $I_{пк}$ — дырочные и электронные составляющие токов эмиттера и коллектора.

Лавинообразное нарастание тока при определенных условиях может привести к «заплыванию» коллекторного перехода. Под заплыванием мы будем понимать явление накопления носителей зарядов в слое истощения коллекторного p—n-перехода, приводящее к компенсации неподвижного пространственного заряда в нем и понижению напряжения на коллекторе. Заплывание может иметь место только при лавинообразном нарастании тока, когда скорость поступления носителей заряда в слой истощения

коллектора будет превышать скорость их удаления оттуда. Динамический пространственный заряд накопившихся носителей может частично или полностью нейтрализовать неподвижный пространственный заряд слоя истощения, что приводит к уменьшению напряжения на коллекторе. Вследствие того, что напряжение на $p-n-p$-структуре U равно сумме напряжений на эмиттере $U_э$ и коллекторе $U_к$, уменьшение напряжения на коллекторе приводит к перераспределению напряжения между эмиттером и коллектором. В результате напряжение $U_э$ возрастает, что в свою очередь вызывает дальнейшее увеличение тока и понижение напряжения на коллекторе $U_к$, а следовательно, и на приборе, так как $U = U_э + U_к \simeq U_к$.

Таким образом, явление заплывания приводит к понижению напряжения, приложенного к прибору, и появлению участка ОС на вольтамперной характеристике.

2. ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ $p-n-p$-СТРУКТУРЫ В ДВУХЭЛЕКТРОДНОМ ВКЛЮЧЕНИИ

Если пренебречь частью эмиттерного электронного тока, достигающего коллекторного перехода по сравнению с другими токами, то можно записать

$$I_э = I_{pэ} + I_{nэ} + M_n \beta_1 I_{nк}, \tag{4}$$

$$I_к = M_p I_{pк} + M_n I_{nк}, \tag{5}$$

где M_n — коэффициент умножения электронов; M_p — коэффициент умножения дырок. Коэффициент β_1 определяется из условия равенства рекомбинационных токов дырок и электронов в базе:

$$(1 - \beta_2) I_{pэ} = (1 - \beta_1) I_{nк}.$$

Учитывая, что $I = I_э = I_к$, из (4) и (5) получим

$$I = \frac{I_{nк} M_n (1 - \alpha_0 M_p) + \alpha_0 M_p (1 - \beta_2) I_{pэ}}{1 - \alpha_0 M_p}. \tag{6}$$

Выражения для токов, входящих в (6), можно получить из решения уравнений непрерывности и диффузии. После подстановки значений этих токов в (6) получим выражение для вольтамперной характеристики рассматриваемой структуры, в котором токи отнесены к единице площади перехода:

$$J = \frac{1}{1 - \alpha_0 M(U)} \frac{1 - e^{aU}}{e^{aU} - k} \{\alpha_0 M(U) J_{ps} D(k+1) - M(U)[1 - \alpha_0 M(U)] J_{ns}\}, \tag{7}$$

где J_{ps}, J_{ns} — дырочная и электронная составляющие тока насыщения

$$a = \frac{q}{kT}; \quad k = \frac{J_{ps} \operatorname{cth} \frac{l}{L_p} (1 - \alpha_0 M)}{J_{ns} + J_{ps} \frac{1}{sh \frac{l}{L_p}} (1 - \alpha_0 M)}; \quad D = \frac{\operatorname{ch} \frac{l}{L_p} - 1}{\operatorname{sh} \frac{l}{L_p}};$$

l — ширина базы; L_p — диффузионная длина дырок. Выражение (7) получено в предположении, что $U = U_э + U_к$; $M = M_p = M_n$. Оно справедливо только до начала участка ОС, однако позволяет качественно оценить дальнейшее поведение $p-n-p$-структуры.

Из выражений (2) и (7) следует, что форма вольтамперной характеристики в основном определяется членом $1/1 - \alpha_0 M$. При $U \ll U_B$,

когда $M=1$, произведение $\alpha_0 M < 1$, через структуру протекает ток порядка тока насыщения коллектора. Это соответствует области A на идеализированной характеристике, приведенной на рис. 2. При $U \to U_B$ $\alpha_0 M \to 1$, а ток стремится к бесконечно большой величине и ограничивается только величиной внешнего сопротивления R. Это соответствует началу области $Б$, причем здесь ток определяется выражением $I=(E-U_2)R^{-1}$. При дальнейшем увеличении напряжения произведение $\alpha_0 M$ может стать равным единице. Для этого необходимо, чтобы коэффициент α_0 возрастал с током. При выполнении условия $\alpha_0 M=1$ начнется заплывание коллектора и произойдет переброс в состояние с малым сопротивлением (точка a на рис. 2). Это имеет место при напряжении

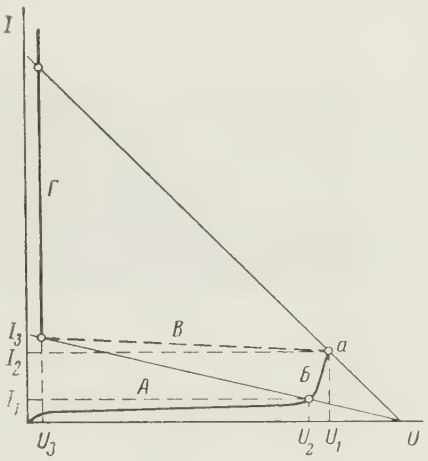


Рис. 2. Идеализированная вольтамперная характеристика структуры $p—n—p$-типа

$$U_1=U_B\sqrt[n]{1-\alpha_0}, \qquad (8)$$

определяемом из условия $\alpha_0 M=1$. Область B — неустойчивая. Ей соответствует условие $M=1$, $\alpha_0=1$, а области $Г$ — $M=1$, $\alpha_0 \simeq 1$. При этом ток не зависит от напряжения и определяется величиной внешнего сопротивления.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

На рис. 3 приведены вольтамперная характеристика $p-n-p$-структуры, полученная экспериментально (кривая a), и ее осциллограмма.

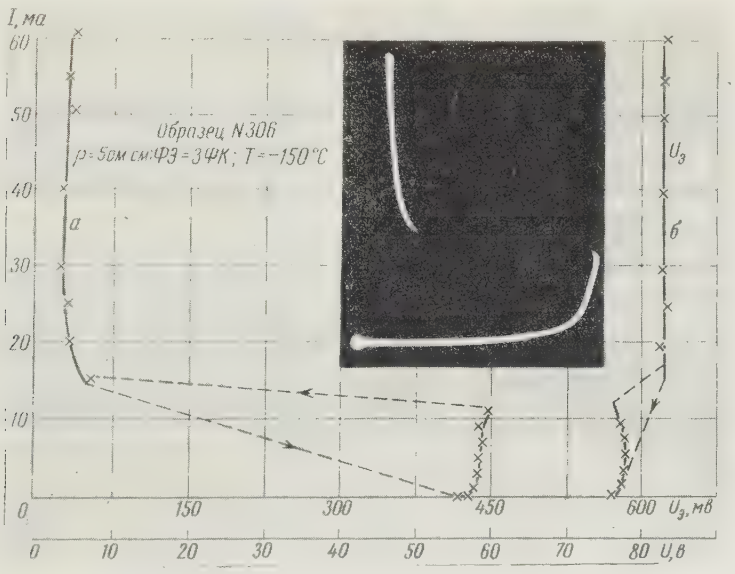


Рис. 3

а — экспериментальная характеристика $p-n-p$-структуры и ее осциллограмма; *б* — зависимость напряжения на эмиттере от тока

Структуры $p-n-p$-типа получались вплавлением индия с различными примесями в германиевую пластинку. Удельное сопротивление пласти-

нок германия изменялось от 0,8 до 5 *ом·см*. Вплавление производилось в атмосфере водорода. Характеристика снималась при низких температурах с целью уменьшения влияния тепловой генерации. На рис. 3 (кривая *б*) представлена также зависимость напряжения на эмиттере от тока. Видно, что при уменьшении скачком напряжения на коллекторе напряжение на эмиттере увеличивается также скачком. Величина скачка уменьшается с уменьшением удельного сопротивления базы. Некоторое уменьшение напряжения на эмиттере перед скачком возможно объясняется накоплением электронов в средней области, понижающих потенциальный барьер эмиттера. Расчетные значения U_1, определяемые из (8), хорошо согласуются с экспериментальными значениями этих величин для исследованного диапазона значений ρ.

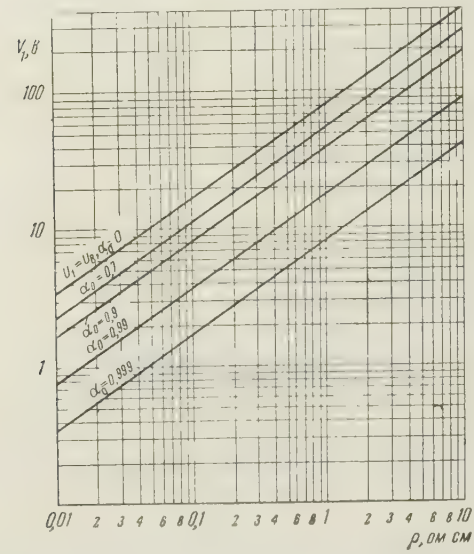


Рис. 4. Зависимость напряжения переброса U_1 от ρ для различных значений α_0, рассчитанная по формуле (8)

Соответствующие расчетные графики для определения величины U_1 приведены на рис. 4. На рис. 5 нанесены экспериментальные графики зависимости U_1 и величины α_0 при перебросе от удельного сопротивления ρ.

Коэффициент α_0 измерялся в триодном режиме, для чего к области базы припаивался третий вывод. По предложению Н. А. Пенина определение α_0 основывалось на применении выражения

$$1/(1-\alpha_0) = I/I_{кз},$$

где I — ток в режиме плавающей базы; $I_{кз}$-ток насыщения коллектора.

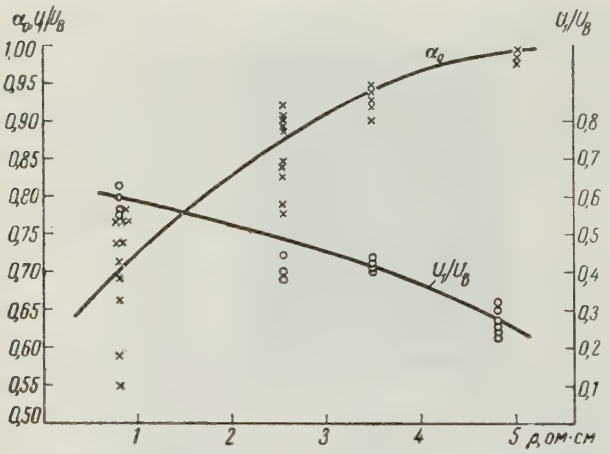


Рис. 5. Зависимости относительного напряжения U_1/U_B и значения коэффициента α_0, соответствующего перебросу, от ρ, полученные экспериментально

Экспериментально установлено, что более резкая зависимость α_0 от тока получается в случае, если площадь эмиттера в 2÷3 раза больше площади коллектора, которая была порядка 0,01 *см*^{2}.

На рис. 6 приведены осциллограммы вольтамперных характеристик образцов М36 с разными площадями переходов. Для случая, когда переход с большей площадью смещен в прямом направлении, область *Б* выражена слабее.

Значения напряжения U_3 и тока I_3 (рис. 2) от температуры практически не зависят. Напряжение U_1 и токи I_1 и I_2 с температурой изменяются

незначительно. Это подтверждает тот факт, что в основе механизма первоначального изменения проводимости прибора лежит лавинообразное увеличение числа носителей заряда в коллекторе, а не тепловая генерация.

Величиной напряжения переброса можно управлять. Например, при облучении коллектора светом напряжение U_1 уменьшается. Это расширяет возможные области применения такого рода приборов.

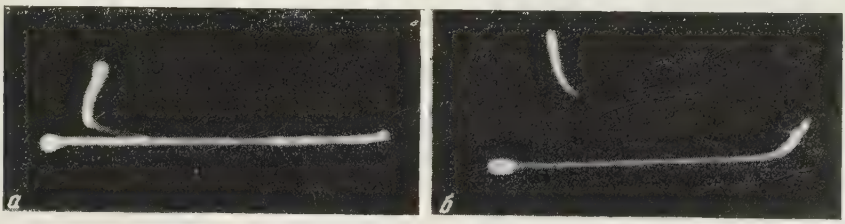


Рис. 6

а - осциллограмма вольтамперной характеристики образца М36 ($\rho = 5$ *ом·см*) при $T = 18°$ С, переход с большей площадью смещен в прямом направлении; *б* — осциллограмма вольтамперной характеристики образца М36, переход с меньшей площадью смещен в прямом направлении. Масштаб: по оси абсцисс 1 *см* соответствует 10 *в*, по оси ординат 1 *см* соответствует 20 *ма*

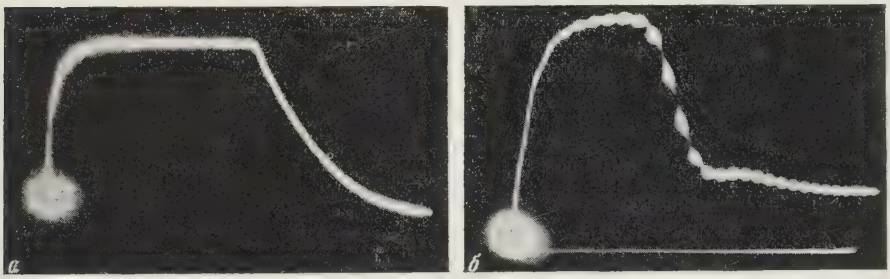


Рис. 7. Осциллограмма напряжения на приборе при измерении на импульсах:
а — до переброса; *б* — после пробоя

Время переключения из состояния с большим сопротивлением в состояние с малым сопротивлением колеблется от 0,1 до 0,35 *мксек*. Соответствующие осциллограммы напряжения на приборе при измерении на импульсах приведены на рис. 7.

4. ПРИМЕНЕНИЯ ПРИБОРА

Вид вольтамперной характеристики описанного выше прибора позволяет использовать его активную нелинейность для получения целого ряда переключающих и генераторных схем. Например, если нагрузку и режим по постоянному току выбрать так, чтобы рабочая точка оказалась на участке ОС, то можно получить колебания, форма которых будет зависеть от характера нагрузки и способа включения прибора.

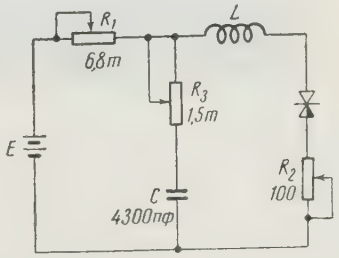


Рис. 8. Схема генератора на приборе с ОС

На рис. 8 приведена схема, в которой при $R_3 = 0$ возникают колебания пилообразной формы. Сопротивление R_2 служит для изменения частоты колебаний, без изменения постоянной времени цепи заряда конденсатора. Малая индуктивность L включается для улучшения линей-

ности выходного напряжения. На рис. 9 приведены осциллограммы выходного напряжения при $L = 0$ и $L = 40$ *мкгн*. При наличии небольшой индуктивности нелинейность пилы не превышает 1%. Максимальная частота, которую удавалось получить в этой схеме, не превышала 1750 *кгц*.

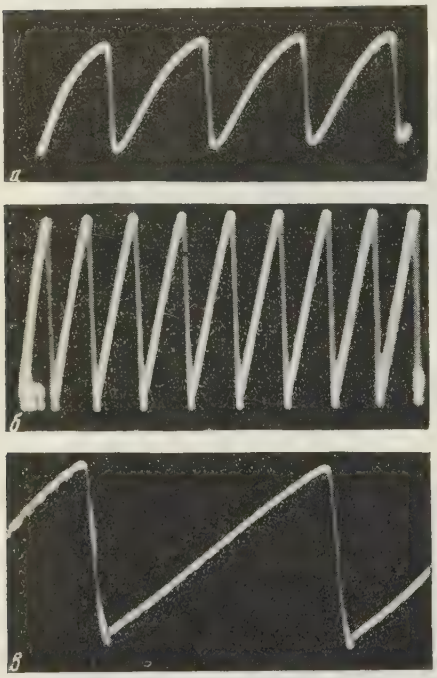


Рис. 9. Осциллограммы напряжения на выходе генератора пилообразного напряжения:

а — $L = 0$; *б* — $L = 40$ *мкгн*; *в* — $L = 40$ *мкгн*, цена метки 0,5 *мксек*

Исключив из схемы, представленной на рис. 8, сопротивления R_2 и R_3 и выбрав рабочую точку в середине участка ОС, получим схему генератора синусоидальных колебаний.

Схему с одним устойчивым состоянием равновесия получим, если путем соответствующего подбора сопротивления R_1 (рис. 8) и напряжения источника E выберем рабочую точку в области Γ вольтамперной характеристики, а в разрыв, образовавшийся при удалении сопротивления R_2, будем подавать запускающие импульсы положительной полярности. Такая схема работает следующим образом. До подачи запускающего импульса конденсатор C разряжен, так как прибор открыт и напряжение на нем мало. Положительный импульс должен иметь достаточную амплитуду, чтобы перевести прибор в состояние с большим сопротивлением. Тогда после прихода положительного импульса начнется зарядка конденсатора C через

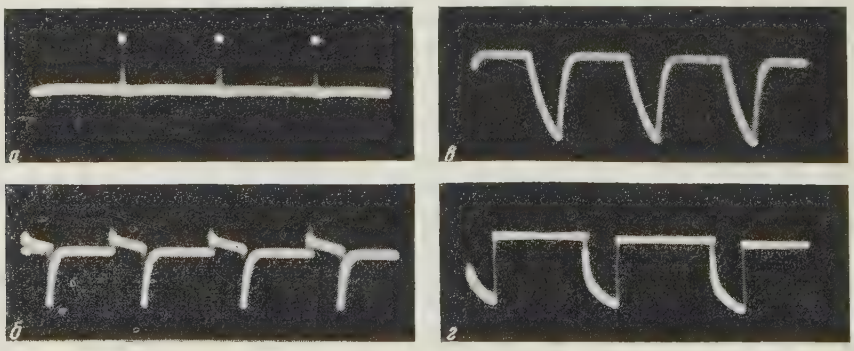


Рис. 10. Осциллограммы формы напряжений в различных точках схемы с одним устойчивым состоянием равновесия:

а — запускающие импульсы $F_{\text{повт}} = 10$ *кгц*; *б* — форма напряжения на сопротивлении R_3; *в* — форма напряжения на конденсаторе C; *г* — форма напряжения на приборе с ОС

сопротивления R_1 и R_3. В результате начнет увеличиваться напряжение, приложенное к прибору. При напряжении, равном напряжению переброса U_1, прибор вновь отпирается и конденсатор C быстро разрядится до первоначального значения через прибор, сопротивление R_3 и внутреннее сопротивление генератора. В результате схема перейдет в исходное

устойчивое состояние, соответствующее малому сопротивлению прибора. На рис. 10 приведены осциллограммы напряжений на различных элементах схемы. Минимальное значение амплитуды запускающего импульса, при котором схема срабатывает, 1÷5 *в*. Форма импульса на выходе схемы и его длительность могут изменяться в широких пределах и зависят от параметров схемы и режима питания по постоянному току.

Схему с двумя устойчивыми состояниями можно получить, исключив из схемы, приведенной на рис. 8, сопротивление R_3, конденсатор C и индуктивность L и подавая запускающие импульсы разной полярности на прибор через конденсатор небольшой емкости. Величины сопротивления R_1 и напряжения источника питания E должны быть выбраны таким образом, чтобы нагрузочная прямая пересекала вольтамперную характеристику в трех точках.

Двухэлектродные полупроводниковые приборы с отрицательным сопротивлением, обладая всеми преимуществами плоскостных приборов, могут применяться в схемах, где обычно используются точечно-контактные приборы.

Выражаем благодарность Б. М. Вулу и Н. А. Пенину за обсуждение результатов работы и ряд ценных советов, а также Н. А. Беловой за выращивание монокристаллов германия.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Лебедев, В. И. Стафеев, В. И. Тучкевич, ЖТФ, 1956, **26**, 10, 2131.
2. J. L. Moll a. oth., Proc. I.R.E., 1956, **44**, 9, 1174.
3. W. Shockley, Tele-Tech, 1957, **76**, 8, 58.
4. I.M. Mackintosh, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 6, 1229.
5. W. Read, Bell System Techn. J., 1958, **37**, 2, 401.
6. A. Reaves, R. B. W. Cooke, L'onde Electrique, 1954, 322, 1.
7. L. Valdes, Proc. I.R.E., 1952, **40**, 4, 445.
8. S. L. Miller, J. Ebers, Bell System Techn. J., 1953, **34**, 833.
9. А. Ф. Иоффе, А. В. Иоффе, ЖТФ, 1939, **9**, 12, 1428.
10. А. И. Губанов, ЖТФ, 1954, **24**, 2, 308.
11. S. L. Miller, Phys. Rev., 1955, **99**, 4, 1234.
12. Б. М. Вул, ЖТФ, 1956, **26**, 11, 2403.
13. А. П. Шотов, ЖТФ, 1956, **26**, 8, 1634.
14. Б. М. Вул, А. П. Шотов, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 8, 1080.
15. А. П. Шотов, ЖТФ, 1958, **28**, 3, 437.

Поступила в редакцию
30 V 1959

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1960 № 2

К ВОПРОСУ О СОСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

М. И. Конторович

Рассматривается уравнение с малой нелинейностью, описывающее поведение лампового генератора с произвольным (конечным) числом степеней свободы. Выводятся уравнения в конечных разностях, которые используются для составления «укороченных уравнений», а также для нахождения периодических решений. Рассматриваются некоторые частные случаи и указывается способ построения высших приближений.

ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение ламповых автогенераторов в радиотехнике требует создания достаточно удобной и законченной теории. В части, касающейся генераторов, предназначенных для генерирования колебаний, близких к синусоидальным, для практики, по-видимому, наиболее важных, решению этой задачи посвящены работы отечественных и зарубежных авторов, перечисление которых заняло бы несколько страниц. Однако из них можно выделить относительно небольшую группу работ, в которых излагаются общие методы рассмотрения задач с малой нелинейностью и вместе с тем удобные для практики, а также позволяющие использовать привычные и удобные для инженеров методы и термины теории переменных токов.

Среди работ этой группы необходимо прежде всего упомянуть работы Ю. Б. Кобзарева, развивающие метод средней крутизны, получивший наиболее широкое распространение на практике. Следует также указать на так называемый символический метод, предложенный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым и изложенный подробно в их монографии «Новые методы нелинейной механики», а также на методы, изложенные в монографии Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний».

Символический метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова был приспособлен и плодотворно использован для рассмотрения задач радиотехники (теории автогенераторов) С. И. Евтяновым.

Необходимо, конечно, отметить, что теория ламповых генераторов получила интенсивное развитие благодаря работам, принадлежащим академикам Л. И. Мандельштаму, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронову и другим советским ученым, заложившим основы теории автоколебательных систем.

В этих работах были получены результаты, имеющие принципиальное значение для теории автогенераторов.

Важную роль сыграли работы по установлению колебаний в автогенераторе, принадлежащие ван дер Полю.

Нужно сказать, что до настоящего времени методы, предназначенные для исследования переходных режимов в ламповых генераторах, стоят в стороне от методов разыскания периодических режимов в системах с малой нелинейностью и обычно излагаются с разных точек зрения. В настоящей работе делаются попытки объединить оба метода и дать такой способ изложения, при котором и метод Пуанкаре и асимптотические методы вытекали бы одновременно из одной общей трактовки.

Однако настоящая работа преследует не только эту методологическую цель, в ней также делается попытка упростить выкладки, которые сопро-

вождают обычно составление дифференциальных уравнений лампового генератора. Для этой цели привлекаются некоторые элементарные методы и приемы, заимствованные из операционного исчисления; как нам кажется, этот путь позволяет наиболее экономно достигнуть желаемого результата, так как освобождает от необходимости развивать специальные методы и дает возможность опереться на известный и хорошо разработанный аппарат.

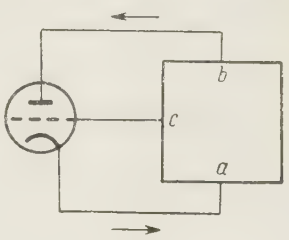
В настоящей статье рассматривается ламповый генератор с произвольным (конечным) числом степеней свободы, в общем случае находящийся под воздействием внешней силы.

Мы не учитываем здесь токи сетки, хотя принципиально это сделать можно.

Уравнения для режима установления в ламповом генераторе с учетом токов сетки в случае автономной системы нами были получены ранее несколько иным способом *.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим изображенный на рис. 1 генератор (автоколебательную или потенциально-автоколебательную систему), собранный на трехэлектродной лампе. Как упоминалось выше, будем считать ток сетки равным нулю. Изображенный на рисунке прямоугольник представляет собой систему, состоящую из постоянных индуктивностей, емкостей и сопротивлений. Постоянное напряжение E, предназначенное для питания анода, и переменное напряжение $e = e(t)$ считаются находящимися внутри прямоугольника.



Обозначим ток, проходящий через лампу, через i, операторный импеданс схемы между зажимами ab — через Z и введем коэффициент обратной связи $k = k(p)$ как отношение преобразованных (по Лапласу) напряжений на зажимах ac и ab (см. рисунок) при условии, что находящиеся внутри прямоугольника эдс равны нулю и что напряжения u_{ac} и u_{ab} создаются только за счет тока i.

Вследствие линейности схемы, изображаемой прямоугольником, можно воспользоваться принципом суперпозиции и написать

$$\begin{aligned} \bar{u}_a &= -\bar{u}_{ab} = -(\bar{i}Z + F_{a1}\bar{E} + F_{a2}\bar{e}), \\ \bar{u}_g &= -\bar{u}_{ac} = -(\bar{i}Z\bar{k} + F_{g1}\bar{E} + F_{g2}\bar{e}), \quad i = f(u_g, u_a). \end{aligned} \tag{1}$$

В этих уравнениях (а также и в дальнейшем) черта над буквой указывает, что подразумевается преобразованная по Лапласу величина. F_{a1}, F_{a2}, F_{g1} и F_{g2} представляют собой рациональные дроби от p и имеют почти очевидный смысл. Так, например, F_{a1} есть не что иное, как преобразованное напряжение на зажимах ab, отнесенное к $\bar{E}$, если $e = 0$ и ток $i = 0$ (анодная цепь оборвана). Аналогично определяются и остальные коэффициенты.

Обычно считают, что ток через лампу определяется управляющим напряжением $u_э = u_g + Du_a$, где D — проницаемость лампы, и пишут $i = f(u_э)$. Это позволяет систему (1) свести к одному уравнению. Очевидно, что из (1) легко получается следующее уравнение:

$$u_э = -(k + D)Z\bar{f}(u_э) - \bar{E}(F_{g1} + DF_{a1}) - \bar{e}(F_{j2} + DF_{a2}). \tag{2}$$

Учитывая, что система состоит из сосредоточенных параметров, всегда

* «Труды Ленинградского политехнического института», № 181, 1955 г.

можно уравнение (2) привести к виду

$$\bar{u}_э = \frac{U(p)}{V(p)}\bar{f}(U_э) - \frac{U_1(p)}{V(p)}\bar{E} - \frac{U_2(p)}{V(p)}\bar{e}, \tag{3}$$

т. е. положить

$$(k+D)Z = \frac{U(p)}{V(p)}; \quad F_{g1} + DF_{a1} = \frac{U_1(p)}{V(p)}; \quad E_{g2} + DF_{a2} = \frac{U_2(p)}{V(p)}.$$

Здесь $V(p)$, $U(p)$, $U_1(p)$ и $U_2(p)$ — полиномы от p, причем предполагается, что степень $V(p)$ не ниже степени $U(p)$*. Таким образом,

$$\begin{aligned} V(p) &= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0, \\ U(p) &= b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0, \end{aligned} \tag{4}$$

причем $n \geqslant m$; a и b — вещественные числа.

Учитывая сказанное выше, можем написать

$$-(k+D)Z = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{p - p_k}, \tag{5}$$

где p_k — корни уравнения $V(p) = 0$, которые считаются простыми, $c_0 = 0$, если $n > m$, и $c_0 = b_m / a_m$, если $m = n$,

$$c_k = \frac{U(p_k)}{\left(\frac{dV}{dp}\right)_{p=p_k}} = \frac{U(p_k)}{V'(p_k)}. \tag{6}$$

Теперь можем переписать (3) в следующей форме:

$$\bar{u}_э = \sum_{k=0}^{n} \bar{u}_k + \bar{\mathbf{E}},$$

где

$$\begin{aligned} &\bar{u}_0 = c_0 \bar{f}(u_э); \quad \bar{u}_k = \frac{c_k}{p - p_k}\bar{f}(u_э) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ &\bar{\mathbf{E}} = -\bar{E}(F_{g1} + DF_{a1}) - \bar{e}(F_{g2} + DF_{a2}). \end{aligned} \tag{8}$$

Перейдем теперь от соотношений для преобразованных функций к уравнениям для оригиналов. Первое соотношение, очевидно, переписывается так:

$$u_0 = c_0 f(u_э).$$

Для того чтобы преобразовать равенства, определяющие $\bar{u}_k$, напишем

$$(p - p_k)\bar{u}_k = c_k \bar{f}(u_э). \tag{9}$$

Заменяя, как это обычно делают, умножение преобразованной функции на p дифференцированием оригинала, находим

$$\frac{du_k}{dt} - p_k u_k = c_k f(u_э)^{**}. \tag{10}$$

Для третьего соотношения, содержащего ε, имеем аналогично

$$V(p)\bar{\mathbf{E}} = U_1(p)\bar{E} + U_2(p)\bar{e}. \tag{11}$$

---

* Если бы это условие не имело места, то мы пришли бы к уравнению с малым параметром при старшей производной, которое, как известно, нуждается в особом рассмотрении.

** См. Приложение 1.

Далее, заменяя $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{E}$ и $\bar{e}$ соответственно через $\mathbf{E}$, E и e, а целую степень p — производной соответствующего порядка, получаем дифференциальное уравнение для $\mathbf{E}$.

Полезно отметить, что искомая величина

$$u_э = \sum_{k=0}^{n} u_k + \mathbf{E}$$

подчиняется дифференциальному уравнению n-го порядка и, следовательно, для своего окончательного определения требует лишь n начальных условий. С другой стороны, $\sum_{k=0}^{n} u_k$, определяемая уравнениями (10), будет уже содержать n независимых произвольных постоянных, которые можно использовать для удовлетворения n начальных условий. Отсюда вытекает, что в качестве $\mathbf{E}$ можно выбрать любое частное решение того дифференциального уравнения, которое получено, как указано выше, из (11), и нет необходимости брать его общий интеграл.

Прежде чем переходить к дальнейшим преобразованиям, сделаем несколько замечаний.

Будем считать, как это обычно делается, что рассматриваемая колебательная система близка к консервативной. Это значит, что числа $p_k = \alpha_k + j\omega_k$ должны иметь вещественную часть α_k малой. Иначе говоря, если бы мы ввели параметр малости μ, то можно было бы написать $\alpha_k = \mu\alpha_k'$, где α_k' — числа, остающиеся конечными при μ, стремящемся к нулю.

Далее будем считать ток i также малой величиной, т. е. положим $f(u_э) = \mu f_1(u_э)$, где $f_1(u_э)$ — величина, не зависящая от μ или остающаяся конечной при $\mu \to 0$.

В дальнейшем не будем вводить в явном виде параметр малости μ, но во всех рассуждениях упомянутые обстоятельства всегда будем иметь в виду.

Обратившись к уравнениям (10), напишем их теперь так:

$$\frac{du_k}{dt} - j\omega_{0k}u_k = (p_k - j\omega_{0k})u_k + c_k f(u_э). \tag{12}$$

Здесь введены числа ω_{0k} с таким расчетом, чтобы они мало отличались от ω_k и, кроме того, чтобы все ω_{0k} были кратны некоторой ω, т. е.

$$\frac{\omega_{01}}{\nu_1} = \frac{\omega_{02}}{\nu_2} = \cdots = \frac{\omega_{0n}}{\nu_n} = \omega_0, \tag{13}$$

причем $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — целые положительные числа.

Если ввести периоды отдельных колебаний $T_{0k} = 2\pi/\omega_{0k}$ и $T_0 = 2\pi/\omega_0$, то

$$T_{01}\nu_1 = T_{02}\nu_2 = \cdots = T_{0n}\nu_n = T_0. \tag{14}$$

Если внешняя сила будет периодической функцией времени с периодом $T = 2\pi/\omega$, то в серию равенств (13) необходимо включить и равенство для ω.

Выберем теперь некоторый конечный интервал времени $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ и составим приближенное решение системы (10) в предположении, что $f(u_э)$ и $p_k - j\omega_{0k}$ достаточно малы. Как известно, для этой цели, при весьма общих предположениях относительно $f(u_э)$, можно воспользовать-

ся методом последовательных приближений. Если приписывать индекс s функции, взятой в s-м приближении, то можно написать

$$u_{\text{э}s} = \sum_{k=1}^{n} u_{ks} + \mathbf{E}^*, \tag{15}$$

$$u_{ks}(t) = u_k(t_1)\, e^{j\omega_{0k}(t-t_1)} +$$

$$+ e^{j\omega_{0k}t} \int_{t_1}^{t} \{(p_k - j\omega_{0k})\, u_{k,\,s-1}(\tau) + c_k f(u_{\text{э},\,s-1})\}\, e^{-j\omega_{0k}\tau} d\tau, \quad s = 1,\ 2, \ldots,$$

причем при $s = 1$ значение интеграла в правой части этого соотношения принимается равным нулю.

Соотношения (15) позволяют вычислить с любой степенью точности значения u_k в любой точке интервала Δt через значения этих же функций в начале интервала. В частности, положив $t = t_2$, получим значения u_k в конце интервала.

Если теперь произвольный промежуток времени разбить на частные интервалы длиной Δt, то можно из (15) получить уравнения в конечных разностях. Пронумеровав эти интервалы в направлении возрастания t и положив в r-м интервале $t_r \leqslant t \leqslant t_{r+1}$, можем написать

$$u_{ks}(t_{r+1}) = u_k(t_r)\, e^{j\omega_{0k}\Delta t} +$$

$$+ e^{j\omega_{0k}t_{r+1}} \int_{t_r}^{t_{r+1}} \{(p_k - j\omega_{0k})\, u_{k,\,s-1}(\tau) + c_k f(u_{\text{э},\,s-1})\}\, e^{-j\omega_{0k}\tau} d\tau. \tag{16}$$

В частности, при $\Delta t = T_0$

$$u_{ks}(t_r + T_0) - u_k(t_r) =$$

$$= \int_{t_r}^{t_r + T_0} \{(p_k - j\omega_{0k})\, u_{k,\,s-1}(\tau) + c_k f(u_{\text{э},\,s-1})\}\, e^{-j\omega_{0k}(\tau - t_r)} d\tau, \tag{17}$$

где t_r — момент времени, соответствующий началу интервала.

Если теперь остановиться на некотором s-м приближении и отождествить $u_{ks}(t_r + T_0)$ с $u_k(t_r + T_0)$, то соотношение (17) будет представлять собой уравнение в конечных разностях или рекуррентное соотношение, позволяющее последовательно построить все u_k для любых значений t_r, отстоящих друг от друга на равных интервалах T_0. Все значения u_k, соответствующие промежуточным временам $t_r \leqslant t < t_{r+1}$, могут быть определены посредством (15), если там заменить t_1 на t_r.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Уравнения в конечных разностях (17), могущие оказаться весьма полезными при решении ряда задач, однако не являются еще тем аппаратом, который обычно используется в теории колебаний, поэтому мы сейчас попытаемся полученные соотношения преобразовать так, чтобы придать им более привычную форму.

Прежде всего отметим, что формулы (17) можно непосредственно поставить в связь с получением периодических решений по методу малого

* Здесь и ниже, для сокращения выкладок, мы рассматриваем случай $n > m$ и полагаем $u_0 = 0$. В случае $n = m$ все изложенное остается в силе, если внести небольшие и очевидные изменения.

параметра (методу Пуанкаре). Не останавливаясь на этом вопросе, подробно укажем, что если периодическое решение существует, то его можно получить, положив в (17) $u_k(t_r + T_0) = u_k(t_r)$. При наличии периодической вынуждающей силы период обычно известен, и мы получаем n уравнений, содержащих n искомых комплексных величин u_k. В случае автономной системы начальная фаза колебания остается произвольной, но зато появляется неизвестный период, который может быть найден из тех же уравнений, т. е. при том же числе уравнений взамен одной неизвестной — начальной фазы — появляется другая неизвестная — искомый период. Вытекающая из сказанного методика составления уравнений в принципе не отличается от того, что предусматривается методом Пуанкаре.

Однако соотношения (17) могут быть использованы также для составления так называемых укороченных уравнений или уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд.

Рассмотрим эту задачу применительно к случаю, когда внешняя сила **E** представляет собой периодическую функцию, так что ее период T равен или кратен величине T_0. Для получения укороченных уравнений, соответствующих обычному методу медленно меняющихся амплитуд, нужно рассмотреть случай $s = 2$. Воспользовавшись (15) и (17), получаем

$$u_{k1}(t) = u_k(t_r)\, e^{j\omega_{0k}(t-t_r)}\, u_{э1} = \sum_{k=1}^{n} u_{k1} + \mathbf{E},$$

$$u_{k2}(t_r + T) - u_k(t_r) = \int_{t_r}^{t_r+T} \{(p_k - j\omega_{0k})\, u_{k1} + c_k f(u_{э1})\} e^{-j\omega_{0k}(\tau - t_r)} d\tau. \quad (18)$$

Подставив в правую часть (18) $u_{k1}(t)$ и отождествив $u_{k2}(t_r)$ с $u_k(t_r)$, получим

$$u_k(t_r + T) - u_k(t_r) = (p_k - j\omega_{0k})\, T u_k(t_r) + c_k F_k(u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n;\ \mathbf{E}), \quad (19)$$

где F_k представляет собой стоящий справа интеграл, причем u_1, u_2, $u_3, \ldots$, u_n и **E** берутся в моменты времени t_r. Нетрудно видеть, что в соответствии с обычными определениями величина

$$S_k = \frac{1}{T}\frac{F_k}{u_k} \quad (20)$$

является средней крутизной по отношению к колебанию с частотой ω_{0k} и представляет собой, вообще говоря, комплексное число, зависящее от t_r через u_k, но в явном виде t_r в S_k не входит. Таким образом, предыдущее равенство может быть написано в форме

$$u_k(t_r + T) - u_k(t_r) = T\,[(p_k - j\omega_{0k}) + c_k S_k]\, u_k(t_r). \quad (20а)$$

От соотношения (20а) можно перейти к дифференциальному уравнению, если ввести в рассмотрение непрерывную функцию, совпадающую в точках $t = t_r$ с $u_k(t_r)$. Сохранив для упрощения за этой функцией обозначение $u_k(t)$, учитывая, что приближенно можно положить

$$u_k(t + T) - u_k(t) = T\frac{du_k}{dt}$$

и заменяя в (20а) t_r через t, получим

$$\frac{du_k}{dt} = [(p_k - j\omega_{0k}) + c_k S_k]\, u_k(t). \quad (21)$$

Таким образом, мы пришли к укороченным уравнениям для системы с произвольным числом степеней свободы.

Для того чтобы сделать предыдущее преобразование более убедительным, рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{du_k}{dt} = \mu\Phi_k(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)^*, \tag{22}$$

где μ — малый параметр.

Проинтегрировав это равенство в пределах t_r и $t_r + T$, получим

$$u_k(t_r + T) - u_k(t_r) = \mu \int_{t_r}^{t_r+T} \Phi_k(u_1,\ u\ ,\ \ldots,\ u_n)\, d\tau.$$

Согласно теореме о среднем, $\Phi_k(\tau) = \Phi_k(t_r) + (\tau - t_r)\frac{d\Phi_k}{d\tau}$, где $d\Phi/d\tau$ — производная, взятая в некоторой промежуточной точке интервала.

Далее можем написать

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\Phi_k}{\partial u_s}\frac{du_s}{d\tau} = \mu \sum_{s=1}^{n} \Phi_k \frac{d\Phi_k}{du_s}\ .$$

Отсюда вытекает следующая оценка:

$$|u_k(t_r + T) - u_k(t_r) - \mu T\Phi_k| \leqslant \frac{1}{2}\mu^2 T^2 \sum_{s=1}^{n} \left|\Phi_k \frac{d\Phi_k}{du_s}\right|_{\text{макс}},$$

где под знаком суммы берутся наибольшие в интервале $t_r \leqslant t \leqslant t_r + T$ значения $\left|\Phi_k \frac{d\Phi_k}{du_k}\right|$.

Отсюда видно, что функции u_k, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (22), удовлетворяют разностным уравнениям с точностью до величин порядка μ^2.

Формулы (21) могут быть преобразованы к несколько иной форме, если обратиться к соотношениям, определяющим коэффициенты c_k. Действительно, на основании (9) и, учитывая, что $V(p_k) = 0$, можем написать, ограничиваясь малыми первого порядка,

$$V(p_k) = V[j\omega_{0k} + (p_k - j\omega_{0k})] = V(j\omega_{0k}) + (p_k - j\omega_{0k})\,V'(j\omega_{0k}) = 0,$$

Если $V'(j\omega_{0k})$ не близко к нулю, то в пределах принятой точности

$$V'(p_k) = V'(j\omega_{0k}) = -\frac{V(j\omega_{0k})}{p_k - j\omega_{0k}}\ .$$

Тогда (21) приобретает вид

$$\frac{du_k}{dt} = (p_k - j\omega_{0k})\,u_k[1 + (k_k + D)\,Z_k S_k] \tag{23}$$

причем здесь индекс k обозначает, что $k_k(p)$ и $Z_k(p)$ берутся при значениях $p = j\omega_{0k}$.

Уравнения (23) напоминают по виду уравнение Баркгаузена для установившихся процессов и являются обобщением последнего на случай нестационарных процессов в системах с многими степенями свободы. Эти уравнения обладают известной наглядностью, но уступают уравнениям (21), так как требуют лишнего ограничения — отсутствия близких корней у уравнения $V(p) = 0$.

* См. Приложение 2.

В частном, однако встречающемся на практике случае, когда система содержит близкие по настройке и слабо связанные контуры, уравнения (21) имеют силу, в то время как (23) уже силы не имеют. Полезно отметить, что число уравнений в системах (21) или (23) равно n — числу корней характеристического уравнения, однако комплексные корни будут комплексно-сопряженные и им будут соответствовать комплексно-сопряженные величины u_k. В этом случае, очевидно, число уравнений сокращается и можно рассматривать из каждых двух комплексно-сопряженных уравнений только одно.

Можно сделать также еще следующее замечание.

Если система автономна и обладает одной степенью свободы, то средняя крутизна (в этом случае будет только одна средняя крутизна S_1) будет величиной вещественной, зависящей только от модуля $|u_1| = |u|$.

Действительно, на основании (18) и (19) можем написать

$$F_1 = \int_t^{t+T} f\left[u_1(t)e^{j\omega_0(\tau-t)} + u_1^*(t)\,e^{-j\omega_0(\tau-t)}\right] e^{-j\omega_0(\tau-t)}\,d\tau =$$

$$= \int_t^{t+T} f\left\{2\,|u(t)|\cos\left[\omega_0(\tau-t)+\varphi\right]\right\} e^{-j\omega_0(\tau-t)}\,d\tau,$$

где φ — аргумент $u_1(t)$.

Введя новую переменную $\omega_0(\tau-t)+\varphi=\xi$, получим

$$F_1 = \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f\left[2\,|u_1(t)|\cos\xi\right] e^{-j(\xi-\varphi)}d\xi = \frac{e^{j\varphi}}{\omega_0}\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f\left[2\,|u(t)|\cos\xi\right] e^{-j\xi}d\xi, \qquad (24)$$

и, следовательно,

$$S_1 = \frac{e^{j\varphi}}{\omega_0 T\,|u|\,e^{j\varphi}}\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f\left[2\,|u(t)\cos\xi\right]e^{-j\xi}d\xi.$$

Учитывая, что интеграл от периодической функции, взятый за полный период, не зависит от пределов интегрирования, а также то, что подынтегральная функция четная, получаем

$$S_1 = \frac{1}{2\pi\,|u|}\int_0^{2\pi} f\left[2\,|u|\cos\xi\right] e^{-j\xi}d\xi. \qquad (25)$$

Эта формула подтверждает, что S_1 является вещественной величиной, зависящей лишь от модуля u.

3. РАССМОТРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

В тех случаях, когда частота внешней силы близка к одной из частот собственных колебаний, или когда имеются две близкие друг к другу частоты собственных колебаний, предыдущие соотношения полезно преобразовать с целью объединения двух близких по частоте колебаний в одно колебание. К рассмотрению двух подобных случаев мы сейчас и перейдем.

а. Частота внешней силы близка к одной из собственных частот. Для определенности предположим, что ω_1 близка к частоте внешней силы ω. Введенная выше эдс $\mathbf{E}$ состоит из постоянной и периодической частей, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1\cos(\omega t+\varphi).$$

Прежде всего в уравнении (21) положим $k = 1$ и отождествим ω_{01} с ω; напишем

$$\frac{du_1}{dt} = (p_1 - j\omega + c_1 S_1)\, u_1\,(t).$$

Введя теперь вместо u_1 величину

$$u_1^0 = u_1 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1 e^{j\varphi},$$

получим

$$\frac{du_1^0}{dt} = (p_1 - j\omega)\, u_1^0 + u_1\,(t)\, c_1 S_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 e^{j\varphi}(p_1 - j\omega).$$

Введя теперь среднюю крутизну для комбинированного колебания u_1^0 посредством соотношения (20):

$$S = \frac{F_1}{Tu_1^0}$$

и учитывая, что $S_1 u_1 = S u_1^0 = F_1$, получаем

$$\frac{du_1^0}{dt} = (p_1 - j\omega + c_1 S)\, u_1^0 - \frac{1}{2}(p_1 - j\omega)\mathbf{E}_1 e^{j\varphi}. \tag{26}$$

Таким образом, в системе (21) уравнение для u_1 заменяется уравнением (26), в которое уже включена переменная часть $\mathbf{E}$. Таким образом, помимо (26) (и аналогичного ему уравнения для комплексно-сопряженных величин, к которому мы будем относить индекс $k = 2$) действуют прежние уравнения из (21), а искомая величина $u_э$ определяется соотношением

$$u_э = \sum_{k=2}^{n} u_k + u_1^0 + u_2^0 + \mathbf{E}_0.$$

В случае системы с одной степенью свободы, аналогично предыдущему, S будет величиной вещественной и зависящей лишь от модуля u_1^0. В этом и заключается преимущество уравнения (26) перед исходными соотношениями.

б. Случай двух близких частот в автономной системе. Второй случай, который мы рассмотрим специально, — это случай двух близких друг к другу частот в автономной системе. Для определенности будем считать, что это ω_1 и ω_2. В соответствии с этим уравнения для u_1 и u_2 запишутся так:

$$\frac{du_1}{dt} = (p_1 - j\omega_0)\, u_1 + c_1 u_1 S_1,$$
$$\frac{du_2}{dt} = (p_2 - j\omega_0)\, u_2 + c_2 u_2 S_2,$$

причем здесь положено $\omega_{02} = \omega_{01} = \omega_0$; кроме того следует учесть, что $u_1 S_1 = u_2 S_2 = F$.

Если объединить оба колебания с близкими частотами в одно и ввести общую огибающую

$$u = u_1 + u_2,$$

то для u из двух предыдущих уравнений обычным способом можно получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - (p_1 + p_2 - 2j\omega_0)\frac{du}{dt} + (p_1 - j\omega_0)(p_2 - j\omega_0)\, u =$$
$$= -[c_1 (p_2 - j\omega_0) + c_2 (p_1 - j\omega_0)]\, F + (c_1 + c_2)\frac{dF}{dt}. \tag{27}$$

Если учесть, что

$$V(p_1) = V(j\omega_0 + p_1 - j\omega_0) = V(j\omega_0) + (p_1 - j\omega_0)V'(j\omega_0) + \\ + \frac{1}{2}(p_1 - j\omega_0)^2 V''(j\omega_0) = 0$$

и аналогичное равенство для $V(p_2)$, а также вытекающие отсюда соотношения

$$V(j\omega_0) = \frac{1}{2}(p_1 - j\omega_0)(p_2 - j\omega_0)V''(j\omega_0),$$

$$V'(j\omega_0) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2 - 2j\omega_0)V''(j\omega_0),$$

то уравнению (27) можно придать вид

$$\frac{1}{2}V''(j\omega_0)\frac{d^2u}{dt^2} + V'(j\omega_0)\frac{du}{dt} + V(j\omega_0)u = -U(j\omega_0)F - U'(j\omega_0)\frac{dF}{dt}. \quad (28)$$

Входящая в (27) и (28) величина F может быть записана в форме Su, где S — средняя крутизна в принятом выше смысле, так как u есть амплитуда (комплексная) объединенных в одно колебаний u_1 и u_2. В случае автономной системы с двумя степенями свободы, подобно предыдущему, S будет вещественной величиной, зависящей только от модуля u.

Следует отметить, что в отличие от случая системы с одной степенью свободы здесь уравнение первого приближения будет дифференциальным уравнением не первого, а второго порядка.

4. О СОСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Теперь остановимся вкратце на вопросе о построении уравнений второго приближения. Уравнения высших приближений строятся аналогично.

Подобно тому, как выше было получено уравнение первого приближения путем замены в (19) разностей производными, для получения уравнений второго приближения необходимо воспользоваться известным из теории интерполирования соотношением.

$$\Delta x \frac{df}{dx} = \Delta f - \frac{1}{2}\Delta^2 f + \frac{1}{3}\Delta^3 f + \cdots$$

или, если разности более высокие, чем вторая, имеют порядок малости, более высокий, чем μ^2, то можно ограничиться первыми двумя членами.

Если обозначить правую часть (19) через $P(t_r)$, то

$$\Delta u_k(t_r) = u_k(t_r + T) - u_k(t_r) = P_k(t_r)^*. \quad (29)$$

Вторая разность $\Delta^2 u_k$, следовательно, будет равна

$$\Delta^2 u_k(t_r) = \Delta u_k(t_r + T) - \Delta u_k(t_r) = P_k(t_r + T) - P_k(t_r).$$

Таким образом,

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{1}{T}\left[P_k(t) - \frac{1}{2}P_k(t + T) + \frac{1}{2}P_k(t)\right] = \frac{1}{2T}[3P_k(t) - P_k(t + T)], \quad (30)$$

причем $P_k(t)$ получается из $P_k(t_r)$ при замене t_r на t. Все вычисления теперь ведутся с точностью до величин третьего порядка (удерживаются величины второго порядка).

Для того чтобы сделать все выкладки более убедительными, попробуем от выражения (30) вернуться вновь к (29).

* См. Приложение 2.

Проинтегрировав (30) от t_r до $t_r + T$, можем написать

$$u_k(t_r + T) - u_k(t_r) = \frac{1}{2T} \int_{t_r}^{t_r + T} [3P_k(\tau) - P_k(\tau + T)]\, d\tau \tag{31}$$

Учитывая, что

$$\int_{t_r}^{t_r + T} \Big\{ 3[P_k(t_r) + P_k'(t_r)(\tau - t_r)] - [P_k(t_r) - P_k'(t_r)(\tau + T - t_r)] \Big\}\, d\tau = 2TP_k(t_r),$$

перепишем правую часть (31) в виде

$$\frac{1}{2T} \int_{t_r}^{t_r + T} [3P_k(\tau) - P_k(\tau + T)]\, d\tau = P_k(t_r) +$$

$$+ \frac{1}{2T} \int_{t_r}^{t_r + T} \Big\{ 3[P_k(\tau) - P_k(t_r) - P_k'(t_r)(\tau - t_r)] - P_k(\tau + T) + P_k(t_r) + P_k'(t_r)(\tau + T - t_r) \Big\}\, d\tau. \tag{32}$$

На основании теоремы о среднем,

$$\int_{t_r}^{t_r + T} [P_k(\tau) - P_k(t_r) - P_k'(t_r)(\tau - t_r)]\, d\tau = T[P_k(t_r + t_0) - P_k(t_r) - P_k'(t_r)\, t_0]$$

причем $0 \leqslant t_0 \leqslant T$.

Применяя теперь теорему о среднем дифференциального исчисления получаем

$$P_k(t_r + t_0) - P_k(t_r) - P_k'(t_r)\, t_0 = [P_k'(t_r + \Theta t_0) - P_k'(t_r)]\, t_0, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Применим повторно теорему о среднем к полученному выражению:

$$\int_{t_r}^{t_r + T} [P_k(\tau) - P_k(t_r) - P_k'(\tau - t_r)]\, d\tau = P_k''(t_r + \eta\Theta t_0)\, \Theta t_0^2, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Интеграл от второй группы членов, входящих в (32), преобразуется аналогично, с той лишь разницей, что вместо t войдет величина $t_r + T$.

Отсюда вытекает следующая оценка:

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{t_r}^{t_r + T} [3P_k(\tau) - P_k(\tau + T)]\, d\tau - P_k(t_r) \right| \leqslant 2T\, |P''|_{\text{макс}},$$

где $|P_k''|_{\text{макс}}$ — максимальное значение модуля второй производной P_k в интервале $t_r \leqslant t \leqslant t_r + 2T$.

Далее можем написать

$$P_k' = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial P_k}{\partial u_s} \frac{du_s}{dt}.$$

Учитывая, что P_k будет величиной малой, порядка μ, и, следовательно, на основании (30), du_k/dt будет также величиной порядка μ, а P_k' — величиной порядка μ^2.

Далее из

$$P_k'' = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial P_k}{\partial u_k} \frac{du_s}{dt}$$

приходим к заключению, что P_k'' будет величиной порядка μ^3.

Таким образом, дифференциальные уравнения (30) эквивалентны разностным уравнениям (29) с точностью до величин порядка μ^3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные разностные уравнения (19) позволяют находить периодические решения уравнений, описывающих поведение лампового генератора. Из этих же соотношений получаются уравнения (21) и (23), описывающие поведение системы при непериодических процессах и соответствующие хорошо известным укороченным уравнениям. Однако соотношения (19), как это показано, позволяют составлять укороченные уравнения и для высших приближений.

Полезно отметить, что все изложение велось применительно к ламповому генератору, но, очевидно, полученные результаты непосредственно могут быть отнесены к уравнению с малой нелинейностью, имеющему вид

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{d^k}{dt^k} \right) y = \mu \sum_{k=1}^{m} \left(b_k \frac{d^k}{dt^k} \right) f(y),$$

с учетом, конечно, условий, оговоренных в тексте.

Приложение 1

Сделанный здесь переход от преобразованных функций к оригиналам носит несколько формальный характер и его полезно дополнить следующими соображениями.

Если воспользоваться очевидным и хорошо известным в операционном исчислении соотношением

$$p \int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{dt}\, e^{-pt}\, dt + \varphi(0),$$

то уравнения (9) приобретут вид

$$\int_0^\infty \left[\frac{du_k}{dt} - p_k u_k - c_k f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \right] e^{-pt}\, dt = u_k(0).$$

Учитывая, что при $p \to \infty$ $[\mathrm{Re}(p)] > 0$, интеграл, стоящий слева, должен обращаться в нуль, приходим к выводу, что $u_k(0) = 0$. Однако интеграл может тождественно обратиться в нуль (для всех p, лежащих в правой полуплоскости) лишь в том случае, когда подынтегральное выражение равно нулю. Отсюда непосредственно приходим к уравнениям (10). Соотношения $u_k(0) = 0$ дают n начальных условий, соответствующих n дифференциальным уравнениям. Отбрасывая эти соотношения, мы освобождаемся от начальных условий, появившихся случайно, благодаря специальному выбору функции u_0, и получаем дифференциальные уравнения задачи, пригодные при произвольных начальных условиях.

Совершенно аналогично можно поступить и с уравнением (11). Учитывая известное из операционного исчисления соотношение

$$p^k \int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty \frac{d^k\varphi}{dt^k}\, e^{-pt}\, dt + \sum_{s=1}^{k} p^{k-s} \varphi^{k-1}(0)$$

и применяя его к левой и правой частям (11), получим равенство, содержащее, с одной стороны, преобразованную функцию от некоторого дифференциального соотношения, а с другой стороны, — полином от p.

Потребовав, подобно предыдущему, обращения в нуль обеих частей этого равенства, мы сразу получаем дифференциальное уравнение для ε и, полагая затем коэффициенты при различных степенях p равными нулю, находим соответствующее число начальных условий. Как и в предыдущем случае, начальные условия отбрасываются.

Приложение 2

Приведенные в тексте соображения по поводу замены разностных уравнений дифференциальными основывались на том, что входящие в уравнения (22) и (29) функции Φ_k и P_k не зависят явно от t и время входит лишь через переменные $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, u_n$. Для того чтобы сделать это обстоятельство более очевидным, обратимся к соотношению (15), заменив в нем t_1 на t_r. При $s=1$ правая часть (15) обращается в $u_k(t_r)\, e^{j\omega_{0k}(t-t_r)}$ и, следовательно, в нее t входит лишь в виде разности $(t-t_r)$.

Покажем теперь, что если это обстоятельство имеет место для некоторого s, то оно будет иметь место и при $s+1$. Действительно, под знак интеграла (15) входят величины, зависящие от $u_{k,\,s-1}$ и E. Согласно введенному предположению, при некотором s $u_{k,\,s-1}$ будут зависеть лишь от разности $t-t_r$. Что касается E, то будем считать, что E есть некоторая периодическая функция от t с периодом T, т. е.

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}(t) = \mathrm{E}(t+T).$$

Таким образом, (15) при данном s можно написать в форме

$$u_{k,\,s}(t) = u_k(t)\, e^{j\omega_{0k}(t-t_r)} + \int_{t_r}^{t} \Psi\left[(\tau - t_r), \mathrm{E}(\tau)\right] e^{-j\omega_{0k}(\tau - t)}\, d\tau.$$

Положив $\tau - t_r = \xi$, получаем

$$u_{k,\,s}(t) = u_k(t)\, e^{j\omega_{0k}(t-t_r)} + \int_{0}^{t-t_r} \Psi\left[\xi, \mathrm{E}(\xi + t_r)\right] e^{j\omega_{0k}(t-t_r-\xi)}\, d\xi.$$

Принимая во внимание периодичность $\mathrm{E}(t)$ и учитывая, что на интервале t_r укладывается целое число периодов, можем последнее соотношение написать так:

$$u_{k,\,s}(t) = u_k(t_r)\, e^{j\omega_{0k}(t-t_r)} + \int_{0}^{t-t_r} \Psi\left[\xi, \mathrm{E}(\xi)\right] e^{j\omega_{0k}(t-t_r-\xi)}\, d\xi.$$

Отсюда ясно, что и u_{ks} будут функциями от аргумента $t-t_r$, и далее методом индукции заключаем, что при любом s все u_{ks} будут зависеть лишь от аргумента $t-t_r$ (не считая, конечно, других величин, в которые t и t_r явно не входят).

Если теперь положить в последнем равенстве $t = t_r + T_0$ и отождествить u_{ks} с u_k, то

$$u_k(t_r + T_0) - u_k(t_r) = e^{j\omega_{0k}T_0} \int_{0}^{T_0} \Psi\left[\xi, \mathrm{E}(\xi)\right] e^{-j\omega_{0k}\xi}\, d\xi.$$

Отсюда непосредственно видно, что $u_k(t_r + T_0) - u_k(t_r)$, а следовательно Φ_k и P_k, не будут зависеть явно от времени (t_r или t).

Поступила в редакцию
17 X 1958

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1960 № 2

ФОРМИРОВАНИЕ ВЕРШИНЫ ИМПУЛЬСА В БЛОКИНГ-ГЕНЕРАТОРЕ НА ПЛОСКОСТНОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ ТРИОДЕ

Б. С. Мельников

На основе линеаризации характеристик полупроводникового триода предлагается квазилинейный метод анализа блокинг-генератора. Полученные результаты позволяют с точностью 15—20% определить не только амплитуду и длительность генерируемого импульса, но и его форму.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Предлагаемый квазилинейный метод анализа блокинг-генератора позволяет аналитически определить форму, амплитуду и длительность генерируемого импульса. Возможность анализа основывается на особенностях работы плоскостных полупроводниковых триодов: импульсные характеристики совпадают с характеристиками, снятыми на постоянном токе, если при снятии последних рассеиваемая на триоде мощность меньше номинальной; при генерации вершины импульса триод находится в режиме перенасыщения; выходное сопротивление триода в режиме усиления велико, а в режиме перенасыщения пренебрежимо мало; в режиме перенасыщения входные характеристики зависят только от тока насыщения [2—5].

Эти особенности позволяют произвести линеаризацию входных и проходных характеристик триода:

$$\frac{\partial I_к}{\partial U_б} = R_{пр} = \text{const}, \quad \frac{\partial I_б}{\partial U_б} = R_{бн} = \text{const}, \quad \frac{\partial I_к}{\partial U_к} = 0,$$

$$I_к = \frac{1}{R_{пр}}(U_б - U_{б0}), \quad U_{б0} = \text{const}, \tag{1}$$

$$I_б = \frac{1}{R_{бн}}(U_б - U_б^*), \quad U_б^* = f(I_к). \tag{2}$$

Для схемы блокинг-генератора на триоде, включенном по схеме с заземленным эмиттером (рис. 1), по эквивалентной схеме базовой цепи (рис. 2) можно составить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} nI_к &= I_н + I_б, \\ \frac{E - U_к}{n} &= L\frac{dI_н}{dt}, \\ \frac{E - U_к}{n} &= \frac{1}{C}\int I_б dt + R_б I_б + U_б, \\ U_к &= I_к R_к + U_б, \\ I_б &= f(U_б, I_к), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $n = W_к/W_б$.

Уравнение $I_б = f(U_б, I_к)$ описывает динамическую характеристику полупроводникового триода. Для нахождения последней обратимся к линеаризованным характеристикам коллекторного и базового токов, изображенным на рис. 3.

Поскольку коллекторный ток не зависит от коллекторного напряжения, восходящая ветвь семейства характеристик коллекторного тока, представляющая собой проходную характеристику, будет для всех кривых семейства одной и той же.

При достижении тока насыщения характеристика $I_к = f(U_б)$ будет идти параллельно оси напряжений.

Пока триод находится в режиме усиления, ток базы мал, так как коэффициент усиления по току β достаточно велик: при достижении насыщения β резко падает и ток базы интенсивно нарастает. В режиме насыщения переход база — эмиттер можно рассматривать как диод, включенный в

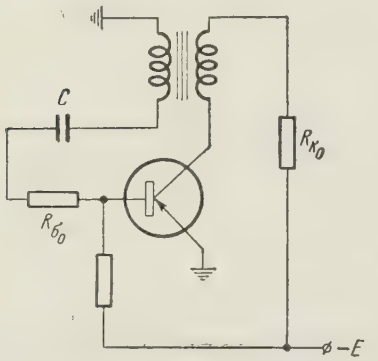


Рис. 1. Принципиальная схема блокинг-генератора

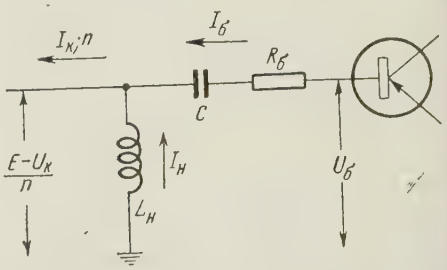


Рис. 2. Эквивалентная схема базовой цепи блокинг-генератора

прямом направлении и обладающий сопротивлением $R_{бн}$, которое много меньше сопротивления триода в режиме усиления, поэтому можно считать, что входная характеристика начинается из точки $U_б^*$, строго соответствующей моменту перехода триода из режима усиления в режим насыщения.

Учитывая (1) и (2), получим

$$I_б = \frac{1}{R_{бн}}(U_б - U_{б0} - I_к R_{пр}). \quad (4)$$

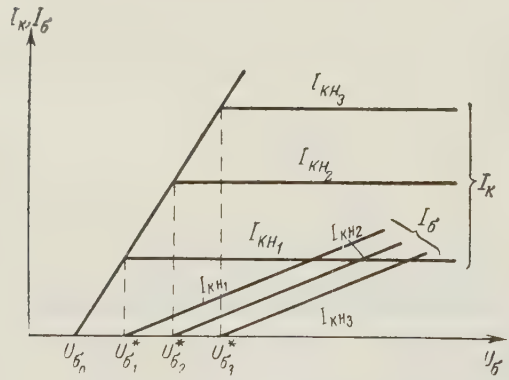


Рис. 3. Линеаризованные входные и проходные характеристики полупроводникового триода

Используя полученное выражение и учитывая, что $I_к R_к \gg U_б$, находим

$$\left.\begin{aligned} \left(R_{пр} + \frac{R_к}{n}\right) I_к(p) - L\, I_б(p) &= \frac{E}{np} + LI_{н0}, \\ \left(\frac{R_к}{n} + R_{пр}\right) I_к(p) + \left(\frac{1}{pC} + R_б'\right) I_б(p) &= \frac{1}{p}\left(\frac{E}{n} - U_{б0} - U_{C0}\right), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где $R_б' = R_{бн} + R_б$; $I_{н0}$ — начальный ток намагничивания; U_{C0} — начальное напряжение на емкости C.

При нулевых начальных условиях, что имеет место при работе блокинг-генератора в режиме самовозбуждения, получим:

при $\mathrm{Re}\, b \neq 0,\ \mathrm{Im}\, b = 0$

$$I_к(t) = E\left[\frac{1}{R_к} + (A_к + B_к)\, e^{-(a-b)t} + (A_к - B_к)\, e^{-(a+b)t}\right], \tag{6}$$

$$I_б(t) = En\left[(A_б + B_б)\, e^{-(a-b)t} + (A_б - B_б)\, e^{-(a+b)t}\right]; \tag{7}$$

при $\mathrm{Re}\, b = 0,\ \mathrm{Im}\, b \neq 0$

$$I_к(t) = E\left[\frac{1}{R_к} + 2\sqrt{A_к^2 + B_к^2}\, e^{-at}\cos(jbt + \varphi_к)\right], \tag{8}$$

$$I_б(t) = En\sqrt{A_к^2 + B_к^2}\, e^{-at}\cos(jbt + \varphi_б), \tag{9}$$

где

$$A_к = \frac{\dfrac{n^2\left(R'_б + \dfrac{R_{пр}}{n}\right)\left(n^2L + R_к R'_б\, C\right)^2}{2R_к\left(R_к + n^2R'_б + nR_{пр}\right)} - 2LCn^2\left(R'_б + \dfrac{R_{пр}}{n}\right)}{4LCR_к\left(R_к + nR_{пр}\right)\left(n^2L - R_к R'_б\, C\right)^2};$$

$$B_к = \frac{\left(R_к + n^2R'_б + nR_{пр}\right)R'_б\, C - \left(1 - \dfrac{n^2R'_б + nR_{пр}}{2R_к}\right)\left(n^2L + R_к R'_б\, C\right)}{\left(R_к + n^2R'_б + nR_{пр}\right)\sqrt{\left(n^2L - R_к R'_б\, C\right)^2 - 4LCR_к\left(R_к + nR_{пр}\right)}};$$

$$A_б = \frac{2LCR_к - \dfrac{\left(n^2L + R_к R'_б\, C\right)^2}{2\left(R_к + n^2R'_б + nR_{пр}\right)}}{4LCR_к\left(R_к + nR_{пр}\right)\left(n^2L - R_к R'_б\, C\right)^2};$$

$$B_б = \frac{C\left[2\left(R_к + n^2R'_б + nR_{пр}\right)\dfrac{R_{пр}}{n} - R'_б R_к\right] - n^2L}{2\left(R_к + n^2R'_б + nR_{пр}\right)\sqrt{\left(n^2L - R_к R'_б\, C\right)^2 - 4LCR_к\left(R_к + nR_{пр}\right)}};$$

$$a = \frac{n^2L + R_к R'_б\, C}{2LC\left(R_к + n^2R'_б + nR_{пр}\right)};$$

$$b = \frac{\sqrt{\left(n^2L - R_к R'_б\, C\right)^2 - LCR_к\left(R_к + nR_{пр}\right)}}{2LC\left(R_к + n^2R'_б + nR_{пр}\right)};$$

$$\varphi_к = \operatorname{arc\,tg}\frac{B_к}{A_к};$$

$$\varphi_б = \operatorname{arc\,tg}\frac{B_б}{A_б}.$$

Таким образом, мы получили уравнения, определяющие изменение коллекторного и базового токов во время генерации вершины импульса.

Для определения длительности импульса необходимо знать величину коэффициента усиления $\beta_к$, соответствующую моменту окончания импульса. Как было показано Л. А. Мееровичем [1], конец генерации импульса соответствует моменту прохождения динамической характеристики блокинг-генератора через линию, являющуюся геометрическим местом точек касания линий нагрузки и характеристик разностного тока (линия B, рис. 4).

Поскольку в нашем случае нагрузка отсутствует, линия B проходит через вершины характеристик разностного тока.

Для нахождения $\beta_к$ необходимо воспользоваться нелинеаризованными входными характеристиками, проходными характеристиками и характеристиками разностного тока (рис. 4 и 5).

То обстоятельство, что характеристики коллекторного тока при подходе к точке насыщения имеют резкий перегиб, приводит к тому, что форма

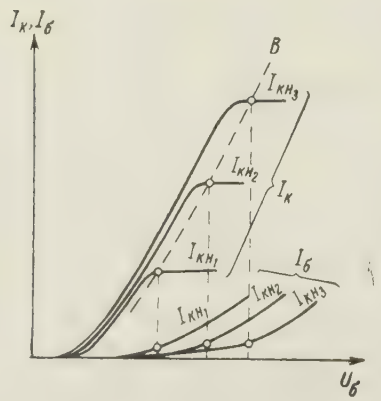


Рис. 4. Входные и проходные характеристики полупроводникового триода

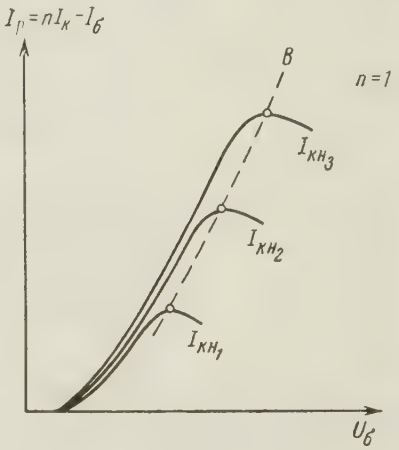


Рис. 5. Характеристики разностного тока для $n = 1$

и положение вершины характеристики разностного тока от изменения коэффициента трансформации зависят слабо; поэтому для определения $\beta_к$ можно перенести линию B с характеристик разностного тока при $n = 1$ на входные и проходные характеристики и найти соотношение коллекторного и базового токов в точке пересечения линии B с характеристиками коллекторного тока.

Значения $\beta_к$, связанные функционально с $I_к$, и определяют зависимость между коллекторным и базовым токами в точке окончания генерации вершины импульса:

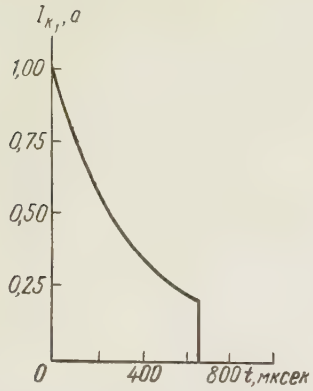
$$I_к(\tau) = \beta_к(I_к)\, I_б(\tau). \qquad (10)$$

Последнее уравнение представляет в общем случае трансцендентное выражение и может быть решено относительно τ либо графически, либо методом последовательного приближения (см. Приложение).

2- СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Для проверки правильности теоретических соотношений была вычислена форма и определена длительность нескольких импульсов, из которых здесь приведены три существенно отличающихся друг от друга по форме: с падающей, постоянной и линейно возрастающей амплитудами коллекторного тока.

Изменение формы импульсов производилось изменением сопротивления, стоящего в цепи базы. Для триода П4В были сняты характеристики $I_к(U_б)$, $I_б(U_б)$, $I_р(U_б)$, по которым были найдены параметры триода: $R_{пр} = 0{,}5$ *ом*; $U_{б0} = 140$ *мв*; $R_{бн} = 1$ *ом*; $\beta_к = 15 + 0{,}03\, I_к$. Параметры схемы имели величины: $C = 5$ *мф*; $R_к = 20$ *ом*; $W_б = 85$ *в*; $L = 75$ *мгн*; $E = 25$ *в*; $W_к = 65$ *в*.



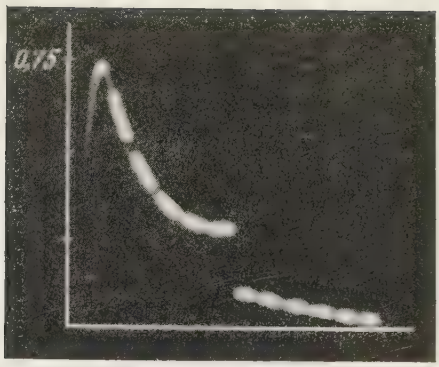


Рис. 6

Рис. 7

Рис. 6. Расчетный импульс коллекторного тока при $R_б = 5{,}8$ *ом*

Рис. 7. Осциллограмма импульса блокинг-генератора при $R_б = 6{,}8$ *ом*

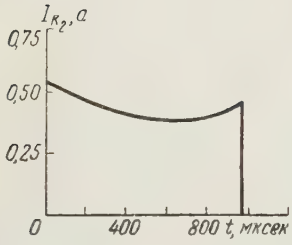
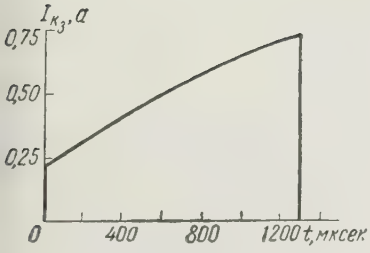


Рис. 8

Рис. 9

Рис. 8. Расчетный импульс коллекторного тока при $R_б = 40{,}8$ *ом*

Рис. 9. Осциллограмма импульса блокинг-генератора при $R_б = 41{,}8$ *ом* (1 метка = 100 *мксек*)



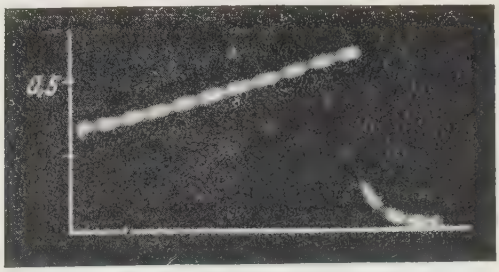


Рис. 10

Рис. 11

Рис. 10. Расчетный импульс коллекторного тока при $R_б = 130{,}8$ *ом*

ис. 11. Осциллограмма импульса блокинг-генератора при $R_б = 131{,}8$ *ом* (1 метка = = 100 *мксек*)

Для $R_{б1} = 5{,}8$ *ом* было получено

$$I_{к1}(a) = 1{,}25 - 1{,}55\,e^{-0{,}54\cdot 10^3 t} + 1{,}34\,e^{-4{,}22\cdot 10^3 t},$$

$$I_{б1}(a) = -0{,}092\,e^{-0{,}54\cdot 10^3 t} + 0{,}89\,e^{-4{,}22\cdot 10^3 t},\ \tau_1 = 620\ мксек.$$

Для $R_{б2} = 40{,}8$ *ом*

$$I_{к2}(a) = 1{,}25 - 1{,}52\,e^{-0{,}5\cdot 10^3 t} + 0{,}82\,e^{-1{,}84\cdot 10^3 t},$$

$$I_{б2}(a) = -0{,}077\,e^{-0{,}5\cdot 10^3 t} + 0{,}38\,e^{-1{,}84\cdot 10^3 t},\ \tau_2 = 960\ мксек.$$

Для $R_б = 130{,}8$ *ом*

$$I_{к3}(a) = 1{,}25 - 0{,}68\,e^{-0{,}57\cdot 10^3 t} - 0{,}35\,e^{-1{,}01\cdot 10^3 t}.$$

$$I_{б3}(a) = -0{,}08\,e^{-0{,}57\cdot 10^3 t} + 0{,}3\,e^{-1{,}01\cdot 10^3 t},\ \tau_3 = 1250\ мксек.$$

Импульсы, полученные экспериментально, имели длительности соответственно $\tau_{э1} = 580$; $\tau_{э2} = 820$; $\tau_{э3} = 1100$ *мксек*.

Для удобства сравнения экспериментальные и расчетные импульсы изображены на рис. 6—11 в одном масштабе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показал эксперимент, приведенный анализ позволяет довольно точно определять не только длительность, но и форму импульса. Длительность определяется с точностью не хуже 15—20%, форма, в смысле соответствия производных и амплитуд,— также не хуже 15 —20%.

Большие расхождения наблюдаются в начале импульса, особенно при больших начальных амплитудах, однако это явление закономерно, так как анализ не учитывает, во-первых, инерционность полупроводникового триода, и, во-вторых, индуктивность рассеивания трансформатора.

Хорошее совпадение теоретической и экспериментальной форм импульса позволяет анализировать блокинг-генератор, работающий не только в режиме формирования импульсов определенной длительности, но и как устройство, обеспечивающее функциональное изменение коллекторного тока.

Приложение

Метод последовательных приближений позволяет аналитически с любой наперед заданной точностью разрешить уравнение (10) относительно τ.

Метод заключается в следующем.

1. Выбирается некоторое среднее значение $\beta_к$ и принимается за постоянное, после чего уравнение (10) приводится к виду

$$A + Be^{-\alpha\tau} - Ce^{-\beta\tau} = 0; \qquad \alpha < \beta; \qquad C > 0, \tag{11}$$

если $\operatorname{Re} b \neq 0$; $\operatorname{Im} b = 0$,
или

$$D + Ee^{-\delta t}\cos(\omega\tau + \varphi) = 0, \tag{12}$$

если $\operatorname{Re} b = 0$; $\operatorname{Im} b \neq 0$.

2. Уравнение (11) или (12) разрешается относительно τ. Уравнение (11) можно разрешить следующим образом.

Положим $\alpha = 0$ и определим значение τ первого приближения:

$$\tau_1 = \frac{1}{\beta}\ln\frac{C}{A+B}. \tag{13}$$

Подставим τ_1 в $Be^{-\alpha\tau}$ выражения (11) и найдем второе приближение:

$$\tau_2 = \frac{1}{\beta}\ln\frac{C}{A + Be^{-\alpha\tau_1}}. \tag{14}$$

n-е приближение τ имеет вид

$$\tau_n = \frac{1}{\beta} \ln \frac{C}{A + Be^{-\alpha\tau_{n-1}}}. \tag{15}$$

Объединяя решения для $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n$, получим

$$\tau_n = \frac{1}{\beta} \ln \cfrac{C}{A + B\left(\cfrac{C}{A + B\left(\cfrac{C}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cfrac{}{A + B\left(\cfrac{C}{A+B}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}}}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}} \Bigg\} (n-1) \text{ раз}. \tag{16}$$

Можно доказать, что τ_n при $n \to \infty$ имеет предел и этим пределом является корень выражения (11). Следовательно,

$$\tau = \tau_n |_{n\to\infty}. \tag{17}$$

Отсюда следует, что предложенный метод решения позволяет найти τ с любой точностью. Практически достаточно ограничиться приближением, когда τ_{n-1} и τ_n отличаются не более, чем на 5%.

Уравнение (12) разрешается аналогично (11). Принимаем $\delta = 0$ и находим первое приближение:

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega}\left[\arccos\left(\frac{D}{E}\right) - \varphi\right]. \tag{18}$$

Подставив τ_1 в $e^{-\delta\tau}$, находим второе приближение:

$$\tau_2 = \frac{1}{\omega}\left[\arccos\left(\frac{D}{Ee^{-\delta\tau_1}}\right) - \varphi\right]. \tag{19}$$

В n-м приближении

$$\tau_n = \frac{1}{\omega}\left[\arccos\left(\frac{D}{Ee^{-\delta\tau_{n-1}}}\right) - \varphi\right]. \tag{20}$$

В результате

$$\tau_n = \frac{1}{\omega} \arccos \cfrac{D}{Ee^{-\frac{\delta}{\omega}\left(\arccos \cdots\cdots \cfrac{}{Ee^{-\frac{\delta}{\omega}} \arccos\left(\cfrac{D}{Ee^{-\frac{\delta}{\omega}\left(\arccos\frac{D}{E} - \varphi\right)}}\right)}\right)}} \tag{21}$$

Здесь символ arc cos повторяется n раз. Можно доказать, что $\tau = \tau_n |_{n\to\infty}$. Отсюда следует, что уравнение вида (12) разрешимо с любой степенью точности.

3. Полученное значение τ подставляем в выражение $\beta_к [I_к(\tau)]$ и определяем $\beta_к$. Далее производится повторение вычисления для τ_1, τ_2, τ_3 и т. д. до тех пор, пока полученные значения τ не будут отличаться друг от друга на допустимую величину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Меерович, Л. Г. Зеличенко, Импульсная техника, Изд. Советское радио, 1954.
2. К. Я. Сенаторов, Г. Н. Берестовский, Анализ процессов в блокинг-генераторе на полупроводниковом триоде, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 5, 654.
3. В. П. Гармаш, Деление частоты с помощью блокинг-генератора, Сб. статей «Полупроводниковые триоды и их применение», под ред. Я. А. Федотова, Изд. Советское радио, 1958.
4. Молл, Переходная характеристика плоскостных триодов при больших сигналах, Сб. Вопр. радиолокационной техники, 1956, 2.
5. Р. Ши, Полупроводниковые триоды и их применение, ГЭИ, 1957.

Поступила в редакцию
23 IV 1959

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ЗАВИСИМОСТИ МОЩНОСТИ РАССЕЯНИЯ ОТ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН

А. В. Просин

В работе [1], посвященной анализу зависимости мощности рассеяния от направленности антенн, сделан вывод о том, что для систем тропосферного рассеяния рационально использовать антенны с большей направленностью в вертикальной плоскости и меньшей — в горизонтальной. В недавно опубликованной заметке [2] утверждается обратное, поэтому целесообразно снова вернуться к этому вопросу.

В [1] мощность рассеяния по отношению к мощности в свободном пространстве определяется по точной формуле (1), полученной в работах [3, 4]. Из (1) [1] следует, что для расчета мощности необходимо знать аналитическую форму зависимости коэффициентов рассеяния и направленности антенн от осей координат, а также пределы интегрирования по объему. В [1] дано решение (1) для реальных характеристик направленности антенн и коэффициентов рассеяния при квадратичном законе спадания интенсивностей неоднородностей с высотой. В результате были получены формулы для расчета мощности рассеяния, которые в общем виде записываются следующим образом:

$$\frac{P_2}{P_{\text{сп}}} = \frac{P_1}{P_{\text{сп}}} F(\alpha_{\text{г}}, \alpha_{\text{в}}), \tag{1}$$

где $P_2 / P_{\text{сп}}$; $\frac{P_1}{P_{\text{сп}}}$ — отношение мощности рассеяния к мощности в свободном пространстве соответственно для направленных и ненаправленных антенн, $F(\alpha_{\text{г}}, \alpha_{\text{в}})$ — множитель, зависящий от направленности антенн, который равен единице для случая ненаправленных антенн и существенно меньше единицы для случая остронаправленных антенн; $\alpha_{\text{г}}$, $\alpha_{\text{в}}$ — угловая ширина диаграмм направленности антенн соответственно в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Величина, обратная $F(\alpha_{\text{г}}, \alpha_{\text{в}})$, определяет потери в усилении антенн L. Общий вид зависимости L от $\alpha_{\text{г}}$ и $\alpha_{\text{в}}$ по данным [1] представлен на рис. 1, где φ_0 — половина нулевого угла рассеяния. В области *I* направленность антенн в горизонтальной плоскости сильнее влияет на потери в усилении антенн, чем их направленность в вертикальной плоскости; в области *II*, наоборот, определяющей является направленность антенн в вертикальной плоскости.

Характер зависимости L от $\alpha_{\text{г}}$ и $\alpha_{\text{в}}$ легко объяснить, исходя из физики явлений, происходящих при рассеянном распространении УКВ. В первом весьма грубом приближении для качественных оценок выражение (1) [1] можно заменить более простым выражением

$$\frac{P}{P_{\text{сп}}} = \frac{16K}{d^2} \sigma V, \tag{2}$$

где K — коэффициент, учитывающий отражение от земли; σ — коэффициент рассеяния; d — расстояние между передатчиком и приемником; V — объем рассеяния. При использовании (2) наличие потерь в усилении антенн объясняется лишь уменьшением размеров рассеивающей области вследствие увеличения направленности антенн.

В работах [1, 3, 5, 6] показано, что эффективный объем рассеяния $V_{\text{эф}}$ тропосферы при квадратичном законе спадания интенсивностей неоднородностей с высотой представляет собой треугольную призму, изображенную на рис. 2, *а*, *б*. Размеры $V_{\text{эф}}$ равны:

$$\left.\begin{aligned} l_{\text{д}} &= ae = \frac{d}{2}, \quad & l_{\text{ш}} &= rr_1 = \frac{1}{3}\frac{d^2}{R_{\text{э}}}, \\ l_{\text{в}} &= ro = \frac{d^2}{8R_{\text{э}}}, \quad & V_{\text{эф}} &= \frac{1}{96}\frac{d^5}{R_{\text{э}}^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $R_{\text{э}}$ — эффективный радиус земли. Следовательно, мощность рассеяния для случая

ненаправленных антенн будет равна

$$\frac{P_1}{P_{\text{сп}}} = \frac{1}{6} K\sigma \frac{d^3}{R_э^2}. \qquad (4)$$

В случае использования остронаправленных антенн потери в усилении будут иметь место в том случае, когда угловая ширина диаграмм направленности антенн будет меньше угловых размеров эффективного объема рассеяния, т. е. при $\alpha_г < \varphi_г$

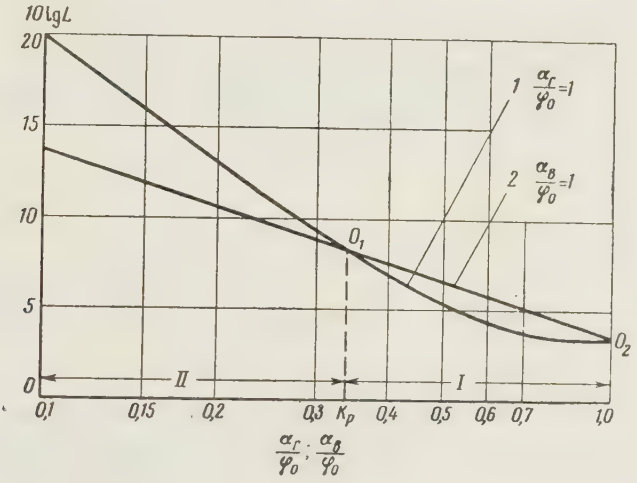


Рис. 1

и $\alpha_в < \varphi_в$ (см. рис. 2). Формулы для расчета мощности согласно (2) и рис. 2 будут равны

$$\frac{P_2}{P_{\text{сп}}} = \frac{P_1}{P_{\text{сп}}} \frac{3}{4} \frac{\alpha_г}{\varphi_0} \left[1 - 2\left(1 - \frac{\alpha_в}{\varphi_0}\right)^2\right] \quad (0{,}5\varphi_в \leqslant \alpha_в \leqslant \varphi_в, \quad 0 \leqslant \alpha_г \leqslant \varphi_г), \qquad (5)$$

$$\frac{P_2}{P_{\text{сп}}} = \frac{P_1}{P_{\text{сп}}} \frac{3}{4} \frac{\alpha_г}{\varphi_0} \cdot 2\left(\frac{\alpha_в}{\varphi_0}\right)^2 \quad (0 \leqslant \alpha_в \leqslant 0{,}5\varphi_в, \quad 0 \leqslant \alpha_г \leqslant \varphi_г). \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) качественно дают зависимость L от $\alpha_г$ и $\alpha_в$, аналогичную (1). Действительно, из (5) и (6) следует, что в области $0{,}5\varphi_в \leqslant \alpha_в \leqslant \varphi_в$ направленность антенн в горизонтальной плоскости более сильно влияет на величину потерь в усилении антенн, чем направленность в вертикальной плоскости (область *I* на рис. 1). В области $0 \leqslant \alpha_в \leqslant 0{,}5\varphi_в$, наоборот, направленность антенн в вертикальной плоскости является определяющей (область *II* на рис. 1).

В настоящее время все практические системы связи тропосферного рассеяния работают в области *I*, поэтому в [1] сделан вывод о рациональности использования в линиях дальней связи антенн с большей направленностью в вертикальной плоскости и меньшей — в горизонтальной.

Причины ошибочности выводов автора работы [2], который рассматривал зависимость мощности рассеяния от направленности антенн на основании весьма приближенной формулы (2) [2], следующие.

1. Форма эффективного объема рассеяния в случае ненаправленных антенн выбрана в [2] в виде прямоугольной призмы (представленной пунктиром на рис. 2, *а*), что не согласуется с представлениями современной теории рассеяния [1, 3, 5, 6].

2. Формула (6) в [2] для длины объема рассеяния, взятая из [6] и входящая в формулы (7), (9) — (11) и (13) [2], неверна. Из рис. 2,*б* следует, что

$$a_в = \frac{\alpha_в R_э d}{R_э \alpha_в + d} \simeq \alpha_в R_э. \qquad (7)$$

3. Форма эффективного объема рассеяния в случае направленных антенн выбрана в [2] в виде прямоугольной призмы (см. рис. 2,*г*); в действительности форма объема, как это следует из рис. 2,*б*, представляет собой ромбическую призму. Из рис. 2,*г* следует, что в предельном случае при $\alpha_в = \varphi_в$ и $\alpha_г = \varphi_г$ объем рассеяния, который берет автор [2], в четыре раза больше эффективного объема тропосферы. В результате, величины $P_2/P_{сп}$, рассчитанные по формулам (10) и (13)

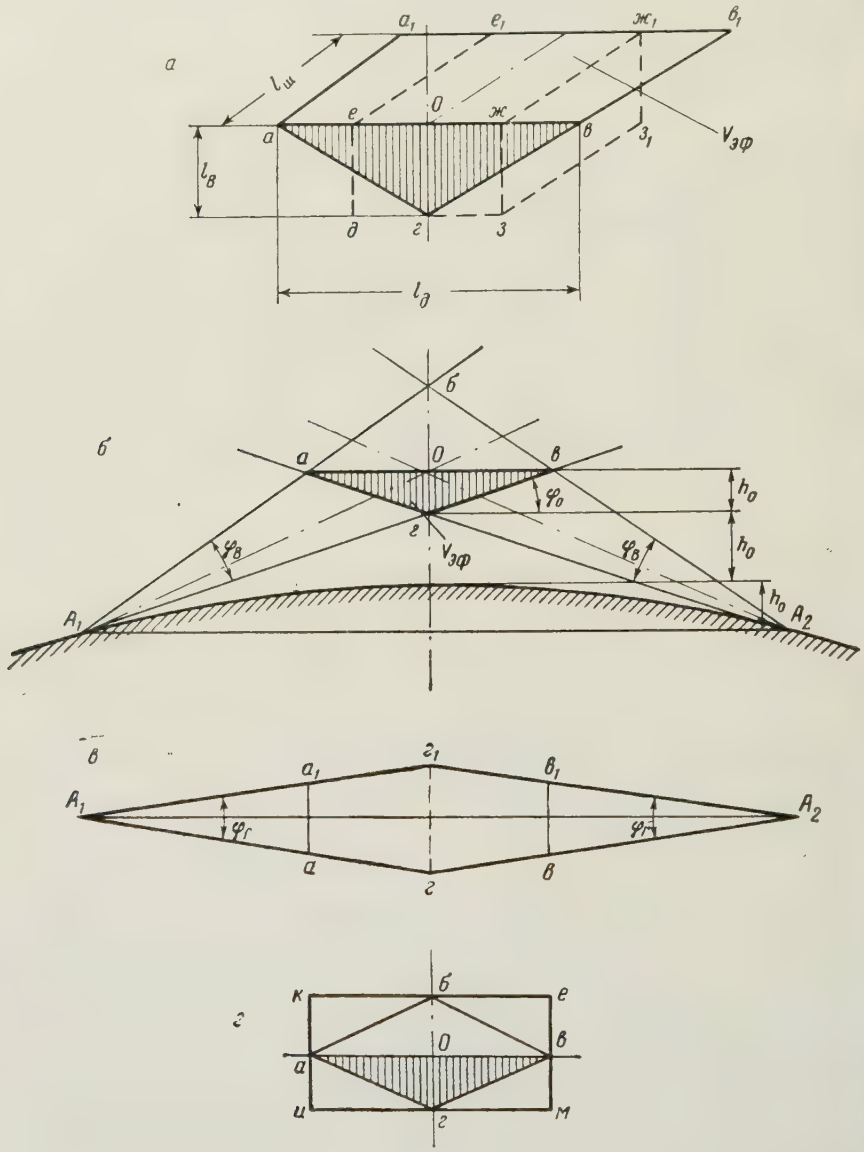


Рис. 2.

заметки [2] (с учетом п. 2), в четыре раза превышают $P_1/P_{сп}$. Очевидно, что этого никогда не может быть, ибо поле в месте приема создается лишь эффективным объемом рассеяния.

4. В подтверждение своих выводов автор [2] ссылается на работу [7]. Однако в [7] разработана новая теория дальнего тропосферного распространения УКВ. Автор [7] не вводил в рассмотрение направленность антенн в горизонтальной плоскости и, следовательно, не мог сделать вывода о том, в какой плоскости направленность антенн сильнее влияет на потери в усилении антенн.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Просин, К расчету мощности рассеяния при дальнем тропосферном распространении ультракоротких волн, Электросвязь, 1958, 8, 13.
2. М. А. Евдокимов, К вопросу о зависимости рассеянной мощности сигнала от длины волны и расстояния, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 8, 1409.
3. В. Е. Гордон, Рассеяние радиоволн в тропосфере, Сб. Вопросы радиолокационной техники, 1955, 4 (28), 198.
4. Х. Стэрас, Направленное рассеяние радиоволн посредством анизотропной турбулентности, Сб. Вопросы дальней связи на ультракоротких волнах, под ред. В. И. Сифорова, 1957, 34.
5. Д. М. Высоковский, Некоторые вопросы дальнего тропосферного распространения ультракоротких радиоволн, Изд. АН СССР, 1958, 33.
6. Д. М. Высоковский, Геометрические характеристики рассеяния радиоволн на турбулентных неоднородностях тропосферы, Электросвязь, 1957, 9, 12.
7. В. Н. Троицкий, О влиянии направленности антенн при дальнем тропосферном распространении УКВ, Электросвязь, 1957, 1, 21.

Поступило в редакцию
26 IX 1959

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЛБВ И ЛОВ

А. М. Кац

В работе [1] предложен метод решения задачи об усилении малого сигнала в ЛБВ, основанный на применении рядов. Суть метода состоит в следующем. Вводя функцию

$$E_n(2\pi CN) = \frac{\delta_1^n}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)} e^{2\pi CN\delta_1} + \frac{\delta_2^n}{(\delta_2-\delta_1)(\delta_2-\delta_3)} e^{2\pi CN\delta_2} + \\ + \frac{\delta_3^n}{(\delta_3-\delta_1)(\delta_3-\delta_2)} e^{2\pi CN\delta_3} \qquad (1)$$

и используя свойства корней кубического уравнения для определения постоянных распространения δ волн в ЛБВ

$$\delta^3 + j(b-jd)\delta^2 + q\delta + j[q(b-jd)+1] = 0, \qquad (2)$$

можно получить выражения для переменных составляющих напряжения, тока и скорости через функцию $E_n(2\pi CN)$, которая, как легко показать, раскладывается в ряд вида

$$E_n(2\pi CN) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi CN)^m}{m!} \frac{D_{m+n}}{D_2}. \qquad (3)$$

Коэффициенты этого ряда D_{m+n} определены в [1]. Следовательно, можно определить усиление ЛБВ, не решая уравнения (2). В этом состоит преимущество данного метода, так как решение (2) при параметрах пространственного заряда (q), затухания (d) и несинхронности (b), отличных от нуля, очень сложно. Недостатком этого метода является плохая сходимость ряда (3) для $CN > 0{,}2$, поэтому приходится рассматривать участки с $CN < 0{,}2$ и вести вычисления для каждого участка с новыми граничными условиями. Такой способ решения задачи несколько усложняет расчеты, но дает возможность рассмотреть задачу о поглотителе в ЛБВ с меняющимся затуханием.

В [1] допущена ошибка, а именно, граничные условия записаны без учета поля пространственного заряда.

Целью настоящей заметки является получение правильных выражений для случая $q \neq 0$, а также рассмотрение некоторых примеров применения метода рядов для ЛБВ и ЛОВ.

С учетом поля пространственного заряда граничные условия для переменных

составляющих напряжения, тока и скорости можно записать следующим образом [2]:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3,$$

$$j\frac{u_0}{\eta}Cv_0 = \frac{\delta_1}{\delta_1^2+q}V_1 + \frac{\delta_2}{\delta_2^2+q}V_2 + \frac{\delta_3}{\delta_3^2+q}V_3, \tag{4}$$

$$-\frac{K}{2C}i_0 = \frac{1}{\delta_1^2+q}V_1 + \frac{1}{\delta_2^2+q}V_2 + \frac{1}{\delta_3^2+q}V_3,$$

где V_0, v_0, i_0 — соответственно переменные составляющие напряжения, скорости и тока на входе ЛБВ; C — параметр усиления; K — сопротивление связи; u_0 — постоянная скорость электронного потока; $\eta = e/m$ — отношение заряда электрона к его массе.

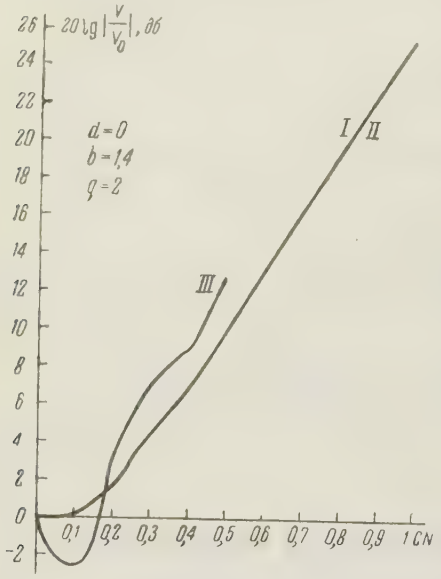


Рис. 1.

Решая эту систему относительно начальных амплитуд трех волн: V_1, V_2 и V_3, имеем

$$V_1 = \left[V_0 - (\delta_2+\delta_3)\left(j\frac{u_0}{\eta}Cv_0\right) + (\delta_2\delta_3 - q)\left(-\frac{K}{2C}i_0\right)\right]\frac{\delta_1^2+q}{(\delta_1-\delta_2)(\delta_1-\delta_3)}; \tag{5}$$

значения V_2 и V_3 получаются при циклической перестановке индексов в (5). При $q = 0$ (5) совпадает с выражением, полученным в [1]. Напряжение в любой точке вдоль системы определяется выражением

$$V = V_1 e^{2\pi CN\delta_1} + V_2 e^{2\pi CN\delta_2} + V_3 e^{2\pi CN\delta_3}. \tag{6}$$

Воспользовавшись (1) и свойствами корней уравнения (2), принимая во внимание (4) и (6), получаем следующие [выражения для переменных составляющих напряжения, скорости и тока:

$$V = (E_2 + qE_0)V_0 + [jpE_2 + E_3 + q(jpE_0 + E_1)]\left(j\frac{u_0}{\eta}Cv_0\right) - \{j(qp+1)E_1 + qE_2 + q[j(qp+1)E_{-1} + qE_0]\}\left(-\frac{K}{2C}i_0\right), \tag{7}$$

$$j\frac{u_0}{\eta}Cv = E_1V_0 + (jpE_1 + E_2)\left(j\frac{u_0}{\eta}Cv_0\right) - [j(qp+1)E_0 + qE_1]\left(-\frac{K}{2C}i_0\right), \tag{8}$$

$$-\frac{K}{2C}i = E_0V_0 + (jpE_0 + E_1)\left(j\frac{u_0}{\eta}Cv_0\right) - [j(qp+1)E_{-1} + qE_0]\left(-\frac{K}{2C}i_0\right). \tag{9}$$

Здесь $p = b - jd$.

Для сравнения полученных выражений с точной формулой линейной теории ЛБВ [3] на рис. 1 представлены кривые зависимости напряжения от расстояния вдоль системы при $q = 2$, рассчитанные по точной формуле (кривая *I*) и по формулам (7)—(9) (кривая *II*). На этом же рисунке нанесена кривая *III*, которая рассчитана по формулам, полученным в [1].

Метод рядов был применен для решения задачи о влиянии локального поглотителя на усиление ЛБВ. На рис. 2 представлена зависимость напряжения от расстояния вдоль системы без поглотителя (кривая *I*) и с поглотителем, помещенным в середине лампы (кривая *II*).

Применяя аналогичный вывод для ЛОВ [4], получим следующие выражения для переменных составляющих напряжения, скорости и тока:

$$V = (E_2 + qE_0)\,V_0 + [(jpE_2 + E_3) + q\,(jpE_0 + E_1)]\left(j\frac{u_0}{\eta}\,Cv_0\right) -$$

$$- \{j\,(qp-1)\,E_1 + qE_2 + q\,[j\,(qp-1)\,E_{-1} + qE_0[\}\left(-\frac{K}{2C}\,i_0\right), \qquad (10)$$

$$j\frac{u_0}{\eta}\,Cv = E_1V_0 + (jpE_1 + E_2)\left(j\frac{u_0}{\eta}\,Cv_0\right) - [j\,(qp-1)\,E_0 + qE_1]\left(-\frac{K}{2C}\,i_0\right), \qquad (11)$$

$$-\frac{K}{2C}\,i = E_0V_0 + (jpE_0 + E_1)\left(j\frac{u_0}{\eta}\,Cv_0\right) - [j\,(qp-1)\,E_{-1} + qE_0]\left(-\frac{K}{2C}\,i_0\right), \qquad (12)$$

где $p = b + jd$; V_0, v_0 и i_0 — соответственно переменные составляющие напряжения, скорости и тока в плоскости входа электронного потока в замедляющую систему.

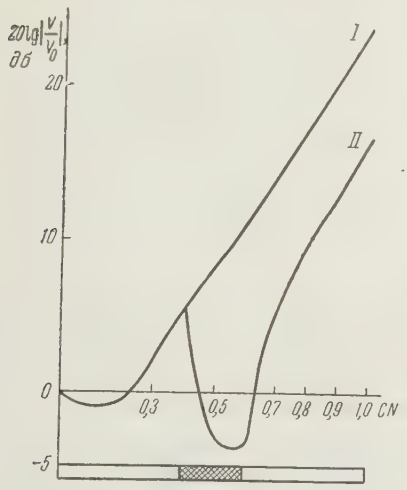


Рис. 2. $d_{сп} = 0{,}2$; $b = 0{,}8$; $q = 1$; $d_п = 3$; $CN_п = 0{,}2$

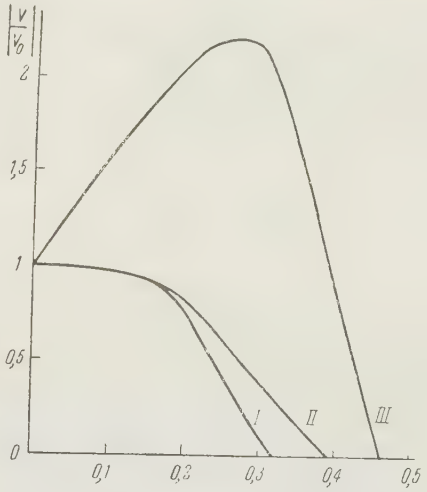


Рис. 3

Формулы (10) — (12) дают возможность определить зависимость амплитуды напряжения от расстояния вдоль системы и стартовые условия для генератора обратной волны.

На рис. 3 представлены кривые зависимости напряжения от расстояния вдоль системы (кривая I — $d = q = 0$; кривая II — $d = 0$, $q = 2$; кривая III — $d = 0{,}8$, $q = 0$), рассчитанные по формулам (10) — (12). Полученные значения $CN_{ст}$ совпадают со значениями $CN_{ст}$, приведенными в [4].

ЛИТЕРАТУРА

. I. A. Mullen, IRE Trans. Electron Devices, 1957, 4, 159.
. W. Kleen, Einführung in Mikrowellen Elektronik, S. Hierzel Verlag, Stuttgart, 1952.
. Д. Пирс, Лампа бегущей волны, перев. с англ. под ред. В. Т. Овчарова, Изд. Советское радио, 1952.
. H. Johnson, Proc. I.R.E., 1955, 43, 6, 684.

Поступило в редакцию
4 V 1959

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КЛИСТРОННОГО ДЕЛИТЕЛЯ ЧАСТОТЫ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ГРУППИРОВКОЙ

С. А. Корнилов, А. Ф. Емельянов

Различные типы клистронных делителей частоты теоретически рассматривались в работах [1] и [2]. Некоторые экспериментальные данные, полученные на обычном отражательном клистроне с бигармоническим резонатором и на трехсеточном отражательном клистроне, приведены в работах [3] и [4]. В указанных статьях рассматривается случай двукратного деления частоты.

Целью настоящей работы являлась проверка эффективности клистронного механизма применительно к делению частоты с кратностью, большей двух. Для эксперимента был выбран вариант клистронного делителя, отличающийся использованием предварительной группировки на управляющей частоте, с регенеративной частью в виде отражательного генератора.

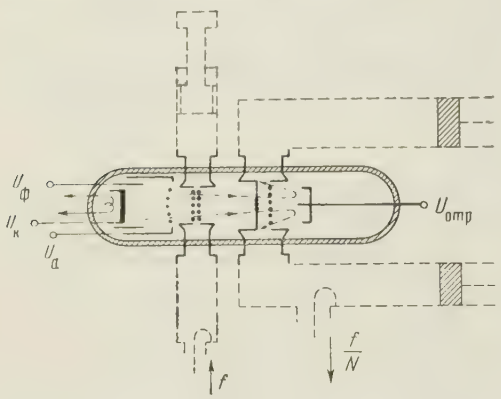


Рис. 1. Устройство делительного клистрона

Устройство такого клистрона представлено на рис. 1. Колебания частоты f, подлежащей делению, подаются во входной резонатор и модулируют электронный луч по скорости. Сгруппированный поток управляет регенеративным процессом в выходной части делителя, работающей по принципу отражательного клистрона, регенерированного на более низкой частоте f/N, где N — кратность деления. Для устранения регенерации на частоте f использована «фонтанирующая» отражательная оптика, обеспечившая стабильную работу делителя. Ток луча контролировался напряжением анода электронной пушки $U_а$. Фокусировка обеспечивалась электростатически подбором потенциала фокусирующего кольца $U_ф$.

Клистрон был рассчитан на деление частоты, лежащей в диапазоне 3000 *Мгц*; изменение кратности деления обеспечивалось перестройкой широкодиапазонного выходного резонатора.

Эксперимент проводился при пилообразной модуляции потенциала отражателя делительного клистрона, что позволяло наблюдать на экране осциллоскопа зону генерации с областью захвата. Типичная осциллограмма приведена на рис. 2. Режим синхронизации регистрировался по биениям выходного сигнала с колебаниями вспомогательного генератора (при захвате наблюдались биения постоянной частоты). Кратность деления устанавливалась при помощи абсолютного коаксиального волномера.

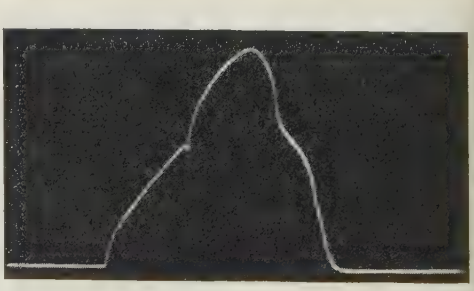


Рис. 2. Осциллограмма зоны генерации с областью захвата (четырехкратное деление)

Двукратное деление можно было осуществить как в автоколебательном режиме (синхронизация), так и в потенциальном (резонанс 2-го рода). При кратности деления, бо́льшей двух, удалось реализовать только режим синхронизации.

На рис. 3,*а* представлена полученная нами зависимость полосы захвата Δf и мощности синхронизированных колебаний $P_{f/N}$ при $N=3$ от мощности входного сигнала P_f при разных токах в зазоре выходного резонатора, характеризующих степень регенерации делителя. Общей особенностью для всех кривых является наличие «потолка». Зависимость $\Delta f(P_f)$ имеет экстремальный характер, в то время как мощность синхронизированных колебаний $P_{f/N}$ почти постоянна. Переплетение кривых в левой части графика становится понятным, если учесть, что коэффициент модуляции плотности тока в выходном зазоре изменяется в зависимости от тока луча даже при неизменной мощности входных колебаний. Это является следствием динамической разгруппировки электронов при дрейфе и изменения электронной нагрузки во входном резонаторе.

На рис. 3,*б* изображены те же зависимости, но уже в функции коэффициента модуляции плотности электронного луча

$$m = X_0\left[1 - X_0\frac{(hl)^2}{12}\right]\frac{\sin hl}{hl},$$

где X_0 — параметр группировки без учета объемного заряда; h — параметр разгруппировки; l — длина дрейфа. X_0 рассчитывался по входной мощности и измеренным значениям эквивалентного сопротивления *.

На этом рисунке восходящие ветви кривых $\Delta f(m)$ практически сливаются. Максимальная полоса захвата получается при весьма небольших m, порядка 0,1. Вероятно, это является следствием сравнительно слабой регенерации делителя.

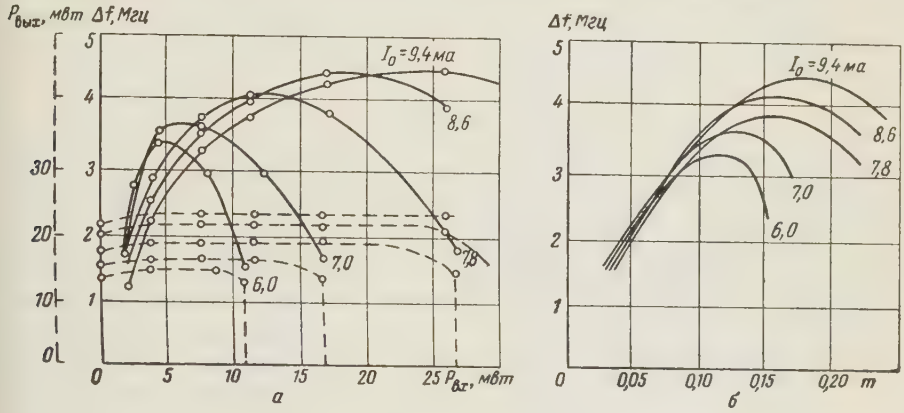


Рис. 3

а — зависимость полосы синхронизации Δf от входной мощности $P_{вх}$ при разных токах I_0 в выходном зазоре клистрона; *б* — зависимость полосы синхронизации от коэффициента модуляции луча по плотности m

Все кривые, приведенные на рис. 3, сняты при потенциале отражателя в центре зоны колебаний, равном —20 *в*. В этих условиях наблюдалось практически полное отражение электронов; при переходе на высшую зону генерации, расположенную близи нулевого значения потенциала отражателя, электроны частично попадали на отражательный электрод, создавая ток в его цепи. Характер зависимости $\Delta f(m)$ при этом сохраняется, однако абсолютная величина полосы захвата увеличивается в несколько раз. Это связано, во-первых, с падением добротности выходного резонатора и, во-вторых, с изменением формы импульсов отраженного электронного потока.

На рис. 4 показана зависимость полосы захвата от кратности деления N, полученная при перестройке выходного резонатора. «Холодная» добротность

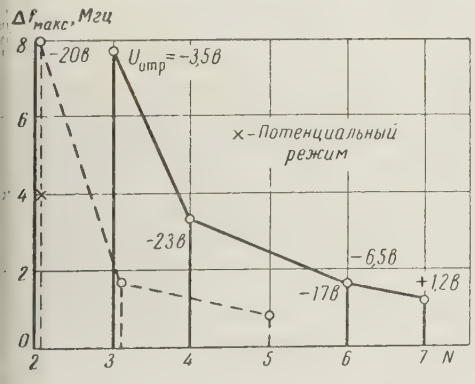


Рис. 4. Зависимость наибольшего значения полосы синхронизации $\Delta f_{макс}$ от кратности деления N

резонатора увеличивалась с ростом N, что несколько усугубляло падение Δf. Значения Δf разбиваются на две группы, одна из которых соответствует потенциалу отражателя, близкому к нулю, а вторая — более отрицательному, при котором электроны не попадают на отражатель (пунктир). Отметим, что коэффициент передачи делителя по мощности в режиме максимальной полосы захвата почти всегда остается больше единицы.

* Корректность расчета m проверялась сравнением вычисленного по экспериментальным данным значения оптимального параметра группировки в режиме усиления $X_{опт} = X\frac{\sin hl}{hl}$ с его теоретическим значением $X_{опт} = 1{,}84$. Было получено расхождение, не превышавшее 15%.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что клистронный принцип может быть с успехом применен для создания делителя частоты с большой кратностью деления. Благодаря тому, что коэффициент передачи клистронного делителя больше единицы, можно легко осуществить каскадное включение нескольких делителей.

Исследованный нами экспериментальный прибор далеко не совершенен. В частности, электронная оптика отражательной части имеет значительные фазовые аберрации; параметры выходной колебательной системы не оптимальны. Это позволяет надеяться на то, что дальнейшая работа приведет к значительному улучшению характеристик делителя.

Описанный клистрон при соответствующем подборе угла пролета электронов в тормозящем поле может работать и в параметрическом режиме. В таком применении он является, по сути дела, отражательным аналогом пролетного клистрона Бриджеса [4]. Во время опытов с двукратным делением частоты нам удалось наблюдать устойчивые области синхронизированных колебаний, возникавшие при реактивном характере электронной проводимости выходного зазора. Их можно отождествить, по-видимому, с автопараметрическим резонансом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н Базаров, М. Е. Жаботинский, Преобразование частоты на отражательном клистроне, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 2, 253.
2. С. А. Корнилов, Деление частоты в пролетном клистроне с тремя зазорами, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 4, 522.
3. Е. Н. Базаров, М. Е. Жаботинский, Деление частоты на отражательном клистроне, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 5, 680.
4. T. J. Bridges, A parametric electron-bea amplifier, Proc. I.R.E., 1958, 46, 2, 494.

Поступило в редакцию
26 V 1959

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ СЧЕТА ГАЗОРАЗРЯДНЫХ СЧЕТНЫХ ЛАМП (ДЕКАТРОНОВ) ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ ПРОМЕЖУТКА АНОД — КАТОД

Ф. М. Яблонский

Многоэлектродные счетные лампы тлеющего разряда (декатроны) широко используются в современной радиоэлектронике. Применение декатронов ограничивается лишь их относительной низкочастотностью, характерной для газоэлектрических приборов.

В работах [1 - 3] указано, что для увеличения предельной скорости счета декатронов необходимо ускорение деионизации промежутка анод — катод и переноса разряда вдоль катодов, однако эти указания носят качественный характер.

Ниже делается попытка определить предельную скорость счета многоэлектродных ламп с холодными катодами по динамическим характеристикам единичного промежутка анод — катод. Рассмотрение проводится для так называемого двухимпульсного декатрона, однако результаты могут быть распространены на другие типы счетных ламп.

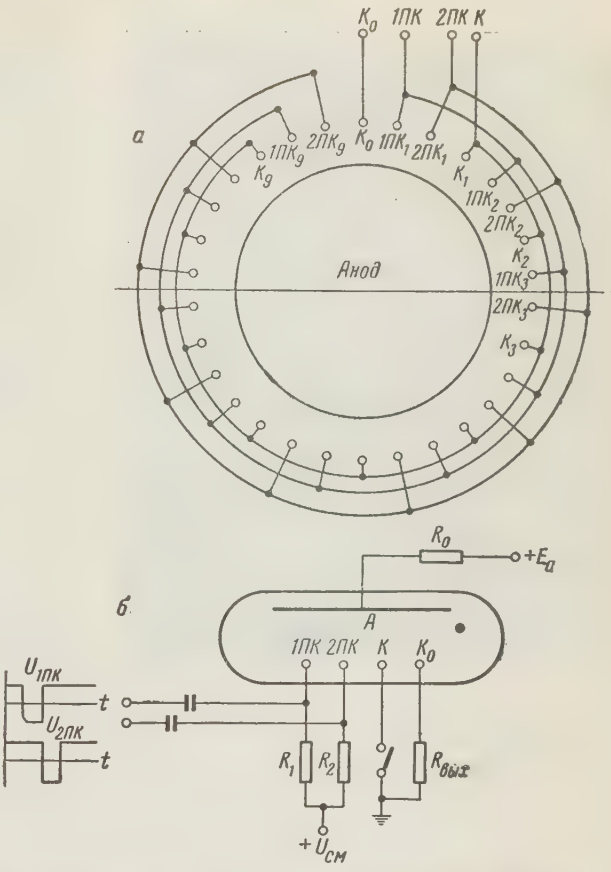
Как известно [4], двухимпульсный декатрон, расположение электродов и принципиальная схема включения которого изображены на рис. 1, *а*, *б*, состоит из дискового анода, окруженного тремя групповыми катодными электродами ($К$, $1ПК$, $2ПК$); каждый из групповых электродов, в свою очередь, состоит из 10 индивидуальных катодных электродов. Счет импульса осуществляется при подаче на управляющие электроды декатрона $1ПК$ и $2ПК$ двух последовательных во времени отрицательных импульсов. Если в начальный момент разряд установлен на катод $К_0$, то после подачи импульса на $1ПК$ ток переходит на электрод $1ПК_1$, напряжение зажигания разряда на который понижено из-за протекания тока на соседний катод $К_0$. После переноса тока на электрод $1ПК_1$, имеющий отрицательный потенциал по отношению к катоду, потенциал общего анода падает (вследствие постоянства напряжения горения тлеющего рязряда), и разряд на $К_0$ прекращается. Окончание импульса на $1ПК$ и начало импульса на $2ПК$ аналогичным образом приводят к переносу разряда с электрода $1ПК_1$ на электрод $2ПК_1$, а окончание импульса на $2ПК$ — к переносу разряда на $К_1$. Осциллограммы напряжений, возникающих на электродах декатрона при его работе в пересчетной схеме, приведены на рис. 2. Кривая *а* показывает форму напряжения между анодом и катодом декатрона: интервал времени $0 - t_1$ соответствует несению тока одним из электродов катода, амплитуда при этом равна напряжению горения; интервал $t_1 - t_2$ соответствует несению тока одним из электродов $1ПК$, напряжение анод — катод при этом снижается, так как ток идет на электрод, находящийся под отрицательным потенциалом по отношению к катоду; интервал $t_2 - t_3$ — прохож-

дению тока на один из электродов *2ПК*, потенциал анода при этом также понижен из-за отрицательного потенциала *2ПК*. В моменты времени t_2 и t_3 возникают пики напряжения, обусловленные переходом разряда с одного электрода на другой.

Осциллограммы *б* и *в*, изображающие формы напряжений между анодом и вторым подкатодом и анодом и первым подкатодом, соответственно, получены при помощи дифференциального усилителя с катодной связью [5], так как ни одна из точек схемы, напряжение между которыми измерялось, не могла быть заземлена. Осциллограммы *б* и могут быть расшифрованы аналогично осциллограмме *а*.

Из рассмотрения кривой *а* рис. 2) следует, что после прекращения катодного тока в момент времени t_1 напряжение между анодом и катодом становится меньше напряжения горения, в результате чего в указанном промежутке (K_0) начинается деионизация. Напряжение между анодом и катодом снова повышается только в момент времени t_3. Для правильного счета импульса необходимо, чтобы в момент зажигание произошло не на уже горевший катод (K_0), а на следующий катод (K_1), напряжение зажигания которого понижено вследствие протекания тока на соседний подкатод ($2ПК_1$). Таким образом, условие правильного счета импульса записывается в виде

$$U_в(t_3) > U_з(t_3), \qquad (1)$$



ис. 1. Расположение электро-ов и принципиальная схема ключения двухимпульсного декатрона:

— расположение электродов; *б* — принципиальная схема включения

где $U_в(t_3)$ — пробивная прочность промежутка анод — K_0, восстановившаяся к моменту $U_з(t_3)$ — напряжение зажигания разряда на катод K_1 при наличии импульса на электрод $2ПК_1$. Величина $U_в$ является функцией тока $I_к$ в промежутке под — катод и времени восстановления $\tau_в = t_3 - t_1$: $U_в = f(I_к, \tau_в)$, величина $U_з$ — функцией амплитуды $I_{2ПК}$ и длительности $\tau_у$ импульса тока на электрод $2ПК_1$.

Точка пересечения кривых $U_в(\tau_в)$ и $U_з(\tau_у)$, построенных при соответствующем совмещении масштаба времени и для значений токов, определяемых параметрами схемы включения, позволяет определить минимальное время $\tau_{кр}$, необходимое для управления декатроном. Если суммарная длительность управляющих импульсов будет меньше $\tau_{кр}$, то произойдет повторное зажигание уже горевшего катода и, следовательно, пропуск счета импульса, и только при длительности управляющих импульсов, большей $\tau_{кр}$, будет иметь место правильный перенос разряда.

Так как для двухимпульсного декатрона при одинаковой длительности управляющих импульсов на *1ПК* и *2ПК* величина $\tau_в = 2\tau_у$, то условие (1) может быть переписано в виде

$$\tau_{у\,мин} = \frac{1}{2}\tau_{кр}. \qquad (2)$$

Аналогичное рассмотрение, проведенное для промежутков анод — первый подкатод и анод — второй подкатод, приводит к формулам, подобным (2). Ввиду симметрии конструкции декатрона можно принять, что минимальное $\tau_у$ равно минимальному допустимому значению $\tau_к$ и определить предельную скорость счета по формуле

$$f_{пред} = \frac{1}{3}\tau_{у\,мин} = \frac{2}{3}\tau_{кр}. \qquad (3)$$

При выводе соотношений (2) и (3) мы пренебрегали конечным временем переноса разряда, составляющим обычно от одной до нескольких микросекунд, что допустимо при длительностях управляющих импульсов порядка десятков микросекунд. При меньших длительностях управляющих импульсов время переноса следует учитывать.

Полученные соотношения были проверены для выпускаемых промышленностью декатронов типов ОГ-1, ОГ-2 и ОГ-3, а также для двух типов экспериментальных декатронов. В качестве примера на рис. 3 показано определение $\tau_{кр}$ для декатрона типа ОГ-1 при разных значениях анодных токов. Рис. 3 также наглядно показывает, что одновременное изменение хода кривых $U_в(t)$ и $U_з(t)$ при изменении анодного тока приводит к относительно малому изменению величины $\tau_{кр}$. Этот эффект подтверждается наблюдаемой на практике относительной независимостью предельной скорости счета от рабочего тока (в диапазоне рабочих токов декатрона).

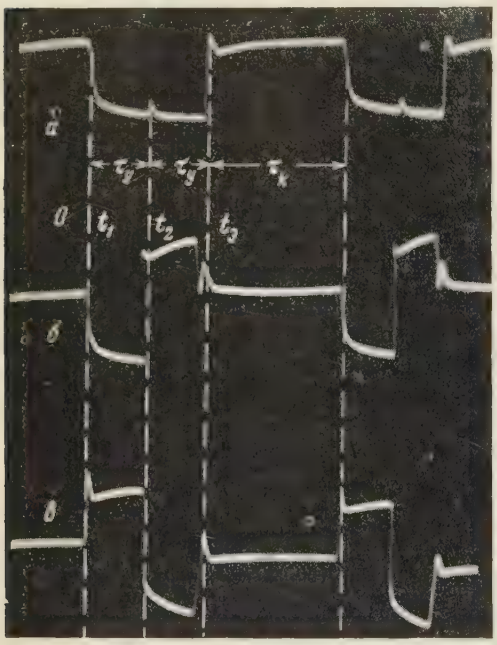


Рис. 2. Осциллограммы напряжений на электродах декатрона:
а — анод — катод; *б* — анод — второй подкатод; *в* — анод — первый подкатод

В таблице приведены данные о предельной скорости счета декатронов, рассчитанной по кривым восстановления и зажигания и определенной при работе в пересчетной схеме. Как показывает таблица, расчетные величины во всех случаях несколько больше величин, определенных экспериментально (примерно на 30 — 60%). Указанная разница, по-видимому, обусловлена тем, что величина $\tau_{кр}$ определена нами только для одного из промежутков декатрона. В действительности величина $\tau_{кр}$ для различных промежутков одного прибора имеет разброс, который связан с неточностью сборки и неодинаковой чистотой поверхности катодных электродов.

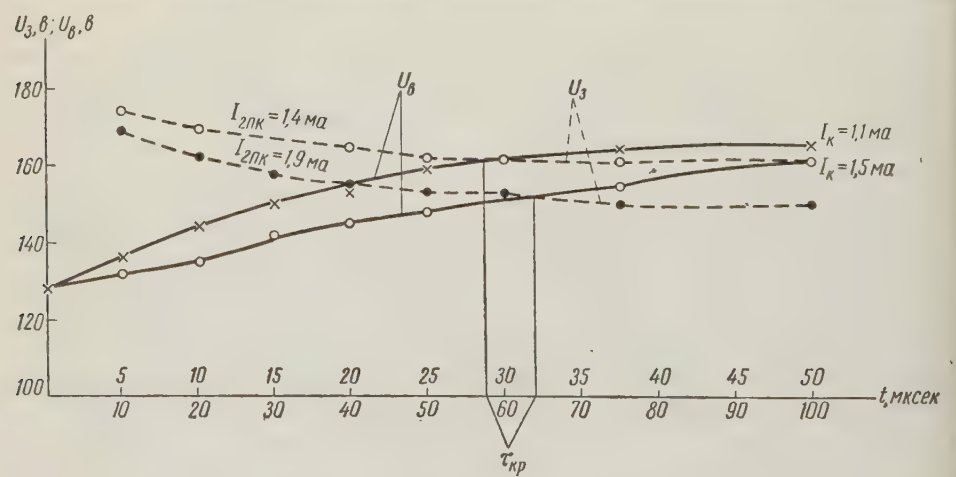


Рис. 3. Определение величины $\tau_{кр}$ для декатрона типа ОГ-1

При точном определении предельной скорости счета необходимо пользоваться наибольшим из значений $\tau_{кр}$, определенных для всех промежутков, что приведет к приближению расчетного значения $f_{пред}$ к значению, определенному экспериментально.

Таблица

Предельные скорости счета декатронов

Тип декатрона	$\tau_{кр}$ (*мксек*)	Предельная скорость счета, *кгц*	
		определенная по формуле (3)	определенная при работе в пересчетной схеме
ОГ-1	60	11	8
ОГ-2	80	8	5
ОГ-3*	15	33	25
Экспериментальный, наполненный инертным газом	100	6	4
Экспериментальный, наполненный смесью инертного газа и водорода	50	13	10

* Для одноимпульсного декатрона ОГ-3 предельная скорость счета была определена по формуле $f_{пред} = \frac{1}{2}\tau_{кр}$.

Рассмотрение процессов, происходящих при работе декатрона в пересчетной схеме, позволяет установить связь между динамическими характеристиками единичного разрядного промежутка анод — катод и предельной скоростью счета. Минимальная длительность управляющих импульсов и предельная скорость счета могут быть определены по точке пересечения кривых восстановления пробивной прочности и зажигания единичного промежутка. Полученные экспериментальные данные подтверждают предлагаемую методику.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Брейдо, Г. М. Янкин, Газоразрядные счетные лампы, Радиотехника, 1957, 12, 2, 65.
2. G. H. Hough, D. S. Ridler, Some recently developed cold cathode glow discharge tubes, Electronic Engng, 1952, 24, 4, 152; 1952, 24, 5, 230; 1952, 24, 6, 272.
3. W. Rentsch, Untersuchungen an Kaltkathoden-Zahlrohren, Hochfreq enztechn. und Elektroakust., 1956, 65, 2, 66.
4. И. Я. Брейдо, Г. М. Янкин, Промышленные газоразрядные счетные лампы (декатроны), Радиотехника, 1958, 13, 7, 80.
5. Ю. К. Барсуков, Дифференциальный усилитель с катодной связью в импульсном режиме, ЖТФ, 1955, 25, 8, 1477.

Поступило в редакцию
16 VI 1959

К ТЕОРИИ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ В КОАКСИАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

М. В. Бутров

В нашей работе [1] была подробно показана техника применения известного вариационного метода Швингера к расчету характеристик неоднородностей конечной толщины в волноводах. Эта техника применима лишь для препятствий, симметричных относительно плоскости, нормальной к направлению распространения электромагнитных волн. Вариационный метод обеспечивает свойственную ему достаточно хорошую точность даже для простейших функций сравнения и приводит к сравнительно простым формулам, дающим возможность вычислить все параметры эквивалентных четырехполюсников. Этот метод имеет очевидные преимущества в отношении точности и простоты по сравнению с существующими немногими способами учета толщины препятствий [2].

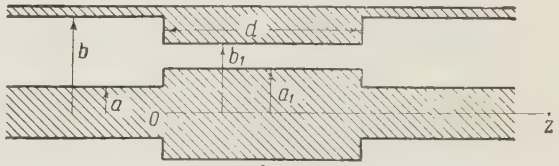


Рис. 1

В настоящей заметке приводятся формулы для расчета основных параметров группы концентрических препятствий конечной толщины в коаксиальном волноводе. Формулы приводятся без подробного вывода, так как последний был проделан в [1]. Полезные соотношения для неоднородностей нулевой толщины в коаксиальном волноводе указаны в [3].

Рассмотрим продольное сечение коаксиального волновода с идеально проводящими стенками (рис. 1). Размеры a_1 и b_1 могут быть соответственно больше и меньше a, b, что в каждом конкретном случае приводит к своей геометрии неоднородности. Отдельно будет рассмотрен случай, когда $a_1 = 0$. Во всех трех областях могут существовать основные TEM волны. Волноводные типы могут быть как распространяющимися, так и затухающими. Зависимость составляющих $\vec{E}$ и $\vec{H}$ от угловой координаты исключается.

Для всех трех областей решения волнового уравнения, удовлетворяющие должным граничным условиям и условиям излучения, могут быть записаны в форме (см. например, [4]):
область *1*

$$E_\rho = \frac{1}{\rho}\left(e^{-ikz} - Re^{ikz}\right) + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha_n Z_0'(\mu_n \rho) e^{\alpha_n z},$$

$$H_\varphi = \frac{1}{\rho}\left(e^{-ikz} + Re^{ikz}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_0'(\mu_n \rho)\, e^{\alpha_n z};$$

область *2*

$$E = \left(D_0 e^{-ikz} - C_0 e^{ikz}\right)\frac{1}{\rho} + \frac{i}{k}\sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\nu_n \rho)\,\beta_n\left(C_n e^{\beta_n z} - D_n e^{-\beta_n z}\right),$$

$$H_\varphi = \left(C_0 e^{ikz} + D_0 e^{-ikz}\right)\frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0'(\nu_n \rho)\left(C_n e^{\beta_n z} + D_n e^{-\beta_n z}\right).$$

Если $a_1 = 0$, то решение в области *2* запишем в виде

$$E_\rho = \frac{i}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(D_n e^{\gamma_n z} - C_n e^{-\gamma_n z}\right)\gamma_n J_0'\left(\frac{\lambda_n \rho}{b_1}\right),$$

$$H_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{-\gamma_n z} + D_n e^{\gamma_n z}\right) J_0'\left(\frac{\lambda_n \rho}{b_1}\right);$$

область *3*

$$E_\rho = \frac{1}{\rho} T e^{-ik(z-d)} - \frac{i}{k}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \alpha_n Z_0'(\mu_n \rho)\, e^{-\alpha_n (z-d)},$$

$$H_\varphi = \frac{1}{\rho} T e^{-ik(z-d)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n Z_0'(\mu_n \rho)\, e^{-\alpha_n (z-d)},$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{\mu_n^2 - k^2}; \quad \beta_n = \sqrt{\nu_n^2 - k^2}; \quad \gamma_n = \sqrt{(\lambda_n / b_1)^2 - k^2}; \quad k = 2\pi/\lambda;$$

$Z_0'(\mu_n \rho)$ и $Z_0'(\nu_n \rho)$ — собственные функции бицилиндров [4] в областях *1*, *3* и *2*; J_0 — функция Бесселя 1-го рода; μ_n — корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\mu_n b) N_0(\mu_n a) = J_0(\mu_n a) N_0(\mu_n b);$$

ν_n — корни аналогичного уравнения для области *2*:

$$J_0(\nu_n b_1) N_0(\nu_n a_1) = J_0(\nu_n a_1) N_0(\nu_n b_1);$$

λ_n — нули функции J_0; N_0 — функция Бесселя 2-го рода; R, T — соответственно коэффициенты отражения и прохождения для неоднородности.

Используя ортогональность собственных функций, все коэффициенты, входящие в выражения для касательных составляющих электрического и магнитного полей в областях *1*, *2*, *3*, можно выразить через касательные составляющие электрического поля $\mathcal{E}_1(\rho)$ и $\mathcal{E}_2(\rho)$ в плоскостях $z = 0$ и $z = d$ соответственно. (Равным образом их можно выразить через касательные составляющие магнитного поля в тех

же плоскостях.) Вводя далее комбинации $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ и следуя указанной в работе [1] процедуре, приходим к следующим равенствам:

$$a_1 > 0$$

$$\frac{1-R-T}{1+R+T} = \frac{P_e \ln \frac{b_1}{a_1}}{\ln \frac{b_1}{a_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(S_{ne} + \operatorname{cth} \frac{\beta_n d}{2} L_{ne} \right) - iP_e \ln \frac{b}{a} \operatorname{ctg} \frac{kd}{2}}; \quad (1)$$

$$\frac{1-R+T}{1+R-T} = \frac{P_0 \ln \frac{b_1}{a_1}}{\ln \frac{b_1}{a_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(S_{n_0} + \operatorname{th} \frac{\beta_n d}{2} L_{n0} \right) + iP_0 \ln \frac{b}{a} \operatorname{tg} \frac{kd}{2}}; \quad (2)$$

$$a_1 = 0$$

$$\frac{1-R-T}{1+R+T} = \frac{P_e}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(S_{ne} + M_{ne} \operatorname{cth} \frac{\gamma_n d}{2} \right)}; \quad (3)$$

$$\frac{1-R+T}{1+R-T} = \frac{P_0}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(S_{n0} + M_{n0} \operatorname{th} \frac{\gamma_n d}{2} \right)}. \quad (4)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$P_{0,e} = -\frac{i}{\ln \frac{b}{a}} \left[\int \mathcal{E}_{0,e} \, d\rho \right]^2; \; S_{0,e} = \frac{k}{s_n \alpha_n} \left[\int \mathcal{E}_{0,e} \rho Z_0' (\mu_n \rho) \, d\rho \right]^2;$$

$$L_{0,e} = \frac{k}{\beta_n p_n} \left[\int \mathcal{E}_{0,e} \rho Z_0' (\nu_n \rho) \, d\rho \right]^2; \; M_{0,e} = \frac{k}{\gamma_n r_n} \left[\int \mathcal{E}_{0,e} \rho J_0' \left(\frac{\lambda_n \rho}{b_1} \right) d\rho \right],$$

где

$$p_n = \frac{1}{2} [b_1^2 Z_1^2 (\nu_n b_1) - a_1^2 Z_1^2 (\nu_n a_n)]; \; r_n = \frac{1}{2} b_1^2 J_1^2 (\lambda_n);$$

$$s_n = \frac{1}{2} \left[b^2 Z_1^2 (\mu_n b) - a^2 Z_1^2 (\mu_n a) \right]$$

В выражениях (1) — (4) интегралы берутся по «просвету» в касательной плоскости $z = 0 (z = d)$, т. е. по области, где $\mathcal{E}_{0,e}(\rho)$ отличны от нуля. Как известно (см., например, [3]), при расчетах для малых просветов целесообразно пользоваться группой формул (1) — (4), так как для таких просветов нетрудно угадать приблизительный характер распределения электрического поля в касательных плоскостях $z = 0, d$. Однако вычисленные таким образом параметры препятствия справедливы и для более широких просветов, для которых принятые функции сравнения для $\mathcal{E}_{0,e}$ уже непригодны. По сходным соображениям для больших просветов следует пользоваться группой формул, получающихся аналогично (1) — (4), но при этом все рассуждения проводятся для азимутальных составляющих магнитного поля. Входящие в нижеследующие формулы величины $H_{0,e}$ образованы так же, как и $\mathcal{E}_{0,e}$. Для $a_1 = 0$, например, находим

$$\frac{1+R+T}{1-R-T} = \frac{ik \left[\int_a^b H_0 d\rho \right]^2}{\ln \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_n}{s_n} \left(\int_a^b H_0 \rho Z_0' (\mu_n \rho) \, d\rho \right)^2 + \frac{\gamma_n \operatorname{th} \frac{\gamma_n d}{2}}{r_n} \left(\int_0^{b_1} H_0 \rho J_0 \left(\frac{\lambda_n \rho}{b_1} \right) d\rho \right)^2 \right\}}, \quad (5)$$

$$\frac{1+R-T}{1-R+T} = \frac{ik \left[\int_a^b H_e \, d\rho \right]^2}{\ln \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_n}{s_n} \left(\int_a^b H_e \rho Z_0' (\mu_n \rho) \, d\rho \right)^2 + \frac{\gamma_n \operatorname{cth} \frac{\gamma_n d}{2}}{r_n} \left(\int_0^{b_1} H_e \rho J_0' \left(\frac{\lambda_n \rho}{b_1} \right) d\rho \right)^2 \right\}}. \quad (6)$$

Выражения (1) — (6) записаны в стационарной форме [3]. Последнее обстоятельство дает возможность в качестве функций сравнения для $H_{0,e}$ $\mathcal{E}_{0,e}$ выбирать приближенные значения, например для $\mathcal{E}_{0,e}$ в виде

$$\mathcal{E}_{0,e}(\rho) = \frac{a_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_0'(\mu_n \rho),$$

если просвет образует область *1*, или в виде

$$\mathcal{E}_{0,e}(\rho) = \frac{b_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n Z_0'(\nu_n \rho)$$

если просвет образует область *2*, и т. д., иными словами, в качестве функций сравнения можно выбрать разложение по собственным функциям бицилиндра, образующего просвет.

Выбор функций сравнения для (5), (6) более труден, так как значения $H_{0,e}$ на торцовых поверхностях произвольны в значительной степени. Это обстоятельство является причиной предпочтения на практике «электрического» приближения. Оба же приближения, как известно [3], для данного класса задач дают возможность определить область значений, в которой заключен точный результат.

Рассмотрим два примера использования приведенных выше соотношений для простейших функций сравнения $\mathcal{E}_{0,e} = a_0/\rho$, обеспечивающих [3] удовлетворительные результаты.

Пусть, например, $b = b_1$, $a_1 > a$. Подставляя выбранные значения $\mathcal{E}_{0,e}$ в (1) —(2), выполняя элементарное интегрирование в пределах от a_1 до b, получаем

$$\frac{1-R+T}{1+R-T} = -\frac{i}{\ln\frac{b}{a}\ln\frac{b}{a_1}\operatorname{tg}\frac{kd}{2} + k\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s_n\alpha_n\mu_n^2}[Z_0(\mu_n b) - Z_0(\mu_n a_1)]^2}\ln^2\frac{b}{a_1},$$

$$\frac{1-R-T}{1+R+T} = -\frac{i}{\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{b}{a_1}\operatorname{ctg}\frac{kd}{2} + k\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s_n\alpha_n\mu_n^2}[Z_0(\mu_n b) - Z_0(\mu_n a_1)]^2}\ln^2\frac{b}{a_1}.$$

Если здесь d таково, что

$$\ln\frac{b}{a_1}\operatorname{tg}\frac{kd}{2} = -k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s_n\alpha_n\mu_n^2}[Z_0(\mu_n b) - Z_0(\mu_n a_1)]^2 = -A,$$

то эквивалентная схема препятствия состоит из шунтового индуктивного сопротивления величины

$$Z_L = 2i\ln\frac{b}{a}\frac{A^2 + \ln^2\frac{b}{a_1}}{A\ln^2\frac{b}{a_1}}.$$

При произвольных величинах d эквивалентная схема будет П- или Т-образным четырехполюсником, элементы которого находятся по известным R и T.

Пусть $a_1 = 0$, $b = b_1$ и пусть в области *2* волны затухают. Это условие соответствует случаю предельного аттенюатора. Подставляя $\mathcal{E}_{0,e} = a_0 / \rho$ в (3)—(4), находим

$$\frac{1-R-T}{1+R+T} = -\frac{i}{k}\,\frac{\ln\frac{b}{a}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^2\,\frac{\operatorname{cth}\frac{\gamma_n d}{2}}{\gamma_n r_n \lambda_n^2}\,J_0^2\left(\lambda_n\frac{a}{b}\right)},$$

$$\frac{1-R+T}{1+R-T} = -\frac{i}{k}\,\frac{\ln\frac{b}{a}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^2\,\frac{\operatorname{th}\frac{\gamma_n d}{2}}{\gamma_n r_n \lambda_n^2}\,J_0^2\left(\lambda_n\frac{a}{b}\right)},$$

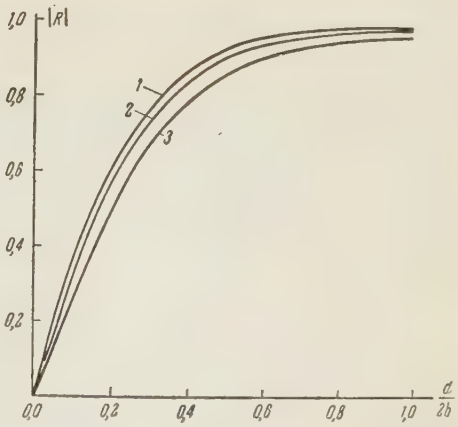


Рис. 2

и эквивалентная схема, как нетрудно убедиться, будет Т-четырехполюсником с индуктивными элементами. На рис. 2 для последнего примера приведены кривые зависимости $|R|$ от $d/2b$ для различных b/a и λ. При $b/a = 1$ $|R| = 1$ для любых λ. Кривые на графике рассчитаны для следующих параметров: *1* — $b/a = 1{,}5$, $2b/\lambda = 0{,}6$; *2* — $b/a = 3{,}5$, $2b/\lambda = 0{,}6$; *3* — $b/a = 3{,}5$, $2b/\lambda = 0{,}3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Бутров, Симметричная диафрагма произвольной толщины в круглом волноводе, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 1, 56.
2. Справочник по волноводам, Изд. Советское радио, 1952.
3. F. Borgnis, Ch. Papas, Randwertprobleme der Mikrowellenphysik, Springer-Verlag, Berlin, 1955.
4. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Изд. ВКАС, 1949.

Поступило в редакцию
9 IV 1959

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ С ПОПЕРЕЧНО НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ

В. В. Масленникова

Точный расчет цилиндрических волноводов с ферритом очень труден, поэтому такие задачи решаются приближенно при помощи метода возмущений, который подобно развит в работах [1—3].

Обычно при решении задачи о цилиндрическом волноводе с ферритом, намагниченным поперечно, высокочастотное поле в феррите, записанное в цилиндрических координатах, преобразуется к прямоугольным координатам, чтобы иметь возможность воспользоваться тензором магнитной проницаемости *, записанным в прямоугольных координатах:

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Такой путь очень труден и ограничивает класс задач, которые можно решить этим методом. Расчет значительно упрощается и становится более точным, если решать такие задачи в цилиндрической системе координат (r, φ, z') и использовать тензор магнитной проницаемости, записанный в этой же системе координат.

---

* Компоненты тензора μ измеряются в единицах μ_0.

Компоненты тензора магнитной проницаемости в цилиндрической системе координат зависят от конфигурации постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$, приложенного к ферриту, которое может быть продольным ($[\vec{H}_0\vec{e}_{z'}]=0$), радиальным ($[\vec{H}_0\vec{e}_r\ ]=0$), круговым ($[\vec{H}_0\vec{e}_\varphi]=0$) или поперечным ($\vec{H}_0\vec{e}_{z'}=0$). Тензор магнитной проницаемости для этих четырех случаев можно получить двумя путями: либо решением уравнения Ландау—Лифшица в цилиндрических координатах, либо путем преобразования тензора магнитной проницаемости (1) при переходе от прямоугольной к цилиндрической системе координат. Ниже мы воспользуемся вторым путем.

Наряду с цилиндрической системой введем в каждой точке также местную прямоугольную систему координат x', y', z', ось z' которой совпадает с направлением подмагничивающего поля $\vec{H}_0$ в этой точке. Известно, что компоненты тензора в двух системах координат, повернутых друг относительно друга, связаны соотношением

$$\mu'_{ik}=\sum_{l,m}\alpha_{il}\alpha_{km}\mu_{lm}. \tag{2}$$

Здесь μ'_{ik} — компоненты тензора в повернутой, а μ_{lm} — в исходной системах координат; α_{il} и α_{km} — косинусы углов между осями повернутой и исходной систем координат. В нашем случае в качестве μ_{lm} нужно взять компоненты тензора (1) в декартовой системе координат x', y', z', тогда μ'_{ik} будет означать компоненты тензора в цилиндрической системе координат r, φ, z'. Значки i, k пробегают значения r, φ, z', а l, m — x', y', z'.

Ниже приводятся результаты такого преобразования тензора магнитной проницаемости (1) к цилиндрической системе r, φ, z' для разных направлений подмагничивающего поля.

а) Продольное подмагничивающее поле $[\vec{H}_0\vec{e}_{z'}]=0$:

$$\overline{\overline{\mu}}=\begin{bmatrix}\mu & -jk & 0\\ jk & \mu & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{bmatrix}. \tag{3}$$

б) Радиальное подмагничивающее поле $[\vec{H}_0\vec{e}_r]=0$:

$$\overline{\overline{\mu}}=\begin{bmatrix}\mu_3 & 0 & 0\\ 0 & \mu & -jk\\ 0 & jk & \mu\end{bmatrix}. \tag{4}$$

в) Круговое подмагничивающее поле $[\vec{H}_0\vec{e}_\varphi]=0$:

$$\overline{\overline{\mu}}=\begin{bmatrix}\mu & 0 & -jk\\ 0 & \mu_3 & 0\\ jk & 0 & \mu\end{bmatrix}. \tag{5}$$

г) Поперечное подмагничивающее поле $[\vec{H}_0\vec{e}_{z'}]=0$. Поворот системы координат, соответствующий этому случаю, показан на рис. 1. После преобразования тензор (1) принимает вид

$$\overline{\overline{\mu}}=\begin{bmatrix}\mu\cos^2\varphi+\mu_3\sin^2\varphi & \dfrac{\mu_3-\mu}{2}\sin 2\varphi & jk\cos\varphi\\ \dfrac{\mu_3-\mu}{2}\sin 2\varphi & \mu\sin^2\varphi+\mu_3\cos^2\varphi & -jk\sin\varphi\\ -jk\cos\varphi & jk\sin\varphi & \mu\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Из приведенных выше результатов видно, что в первых трех случаях преобразование сводилось лишь к перестановке компонент тензора (1) (а тензор (3) даже совпадает с тензором (1)), в то время как в последнем случае компоненты тензора стали зависеть от полярного угла φ.

Задачи, при решении которых используются выражения (3) — (5), частично рассмотрены в литературе, поэтому мы остановимся на результатах решения задач, в которых подмагничивающее поле однородно и приложено перпендикулярно оси z' цилиндрического волновода. К числу таких задач относятся: коаксиальный волновод с поперечно намагниченной тонкой секториальной пластиной, круглый волновод с тонким коаксиальным ферритовым цилиндром и тонкой секториальной пластиной, намагниченными поперечно.

Эти задачи решены методом возмущений. Ниже приведены полученные выражения, определяющие изменение постоянной распространения электромагнитной волны в цилиндрическом волноводе, возмущенном тонким ферритовым элементом.

а) Коаксиальный волновод с тонкой ферритовой пластиной (рис. 2):

$$\Delta\Gamma = \frac{\pi}{2\lambda}\frac{d}{R_2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{1}{\mu\sin^2\varphi_0+\mu_3\cos^2\varphi_0}\right). \quad (7)$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость феррита; ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей волновод; λ — длина волны в воздухе; значения d, φ_0 и R_2 видны из рис. 2.

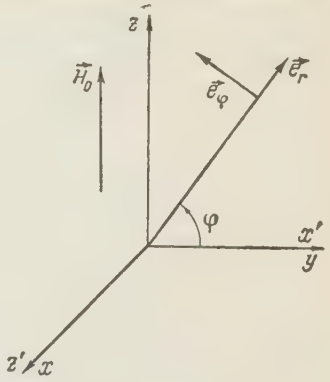


Рис. 1

Из формулы (7) видно, что рассматриваемая система взаимна. При $\varphi_0 = 0$ (пластина расположена перпендикулярно постоянному полю $\vec{H}_0$) такая система не обладает резонансными свойствами, и фаза электромагнитной волны слабо зависит от величины постоянного поля $\vec{H}_0$, так как в выражение для $\Delta\Gamma$ в этом случае входит лишь компонента μ_3. При $\varphi_0 = 90°$ $\Delta\Gamma$ зависит от компоненты μ, и система обладает резонансными свойствами, фаза волны зависит от величины поля $\vec{H}_0$. Эти особенности рассматриваемой системы при разных ориентациях пластины относительно поля $\vec{H}_0$ понятны из простых физических соображений: при $\varphi_0 = 0$ высокочастотное магнитное поле не поддерживает прецессию вектора намагниченности феррита, так как оно расположено вдоль поля $\vec{H}_0$, при $\varphi_0 = 90°$ высокочастотное

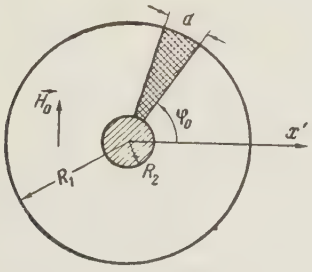


Рис. 2

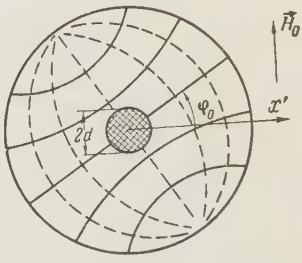


Рис. 3

магнитное поле перпендикулярно $\vec{H}_0$ и играет роль вынуждающей силы, при совпадении частоты которой с частотой прецессии вектора намагниченности происходит ферромагнитный резонанс.

б) Круглый волновод с колебаниями типа H с тонким коаксиальным ферритовым цилиндром (рис. 3):

$$\Delta\Gamma = \frac{(d/R)^2 A_{11}^2}{(A_{11}^2-1)J_1(A_{11})}\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1\right)\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\frac{1}{2\Gamma R}\left(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)+\frac{\Gamma}{\sqrt{\mu\mu_3}}\frac{1}{8}\left[\sqrt{\mu\mu_3}-\right.\right.$$

$$-1-\frac{\sqrt{\mu}-\sqrt{\mu_3}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu_3}}\cos 2\varphi_0\Big]+\frac{\Gamma}{2\mu_0}\Big[\sqrt{\mu\mu_3}-1-$$

$$\left.\left.-\sqrt{\mu\mu_3}\frac{\sqrt{\mu}-\sqrt{\mu_3}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu_3}}\cos 2\varphi_0\Big]-\frac{\Gamma}{2}\frac{\sqrt{\mu}-\sqrt{\mu_3}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu_3}}\cos 2\varphi_0\right\}. \quad (8)$$

Здесь Γ — постоянная распространения в невозмущенном волноводе; A_{11} — корень уравнения $J_1'(x) = 0$; $(90° - \varphi_0)$ — угол наклона плоскости поляризации высокочастотного поля относительно направления постоянного поля $\vec{H}_0$ (см. рис. 3). Из формулы (8) следует, что рассматриваемая система взаимна, но фазовая скорость волн с продольной и поперечной поляризациями ($\varphi_0 = 0$, $\varphi_0 = 90°$) относительно направления постоянного поля $\vec{H}_0$ будет различной. В такой системе происходит преобразование поляризации падающей волны. Действительно, пусть на вход системы поступает электромагнитная волна с линейной поляризацией, причем плоскость поляризации наклонена под произвольным углом к направлению $\vec{H}_0$. Попадая на феррит, волна распадается на две волны с продольной и поперечной поляризациями относительно направления $\vec{H}_0$. Вследствие того, что фазовые скорости этих волн в такой системе будут различны, между ними возникает разность фаз, которая будет изменяться вдоль волновода и зависеть от величины магнитного поля $\vec{H}_0$. Вследствие этого вдоль волновода будет происходить преобразование поляризации суммарной волны от линейной в начале системы через эллиптическую к круговой, когда разность фаз станет $\pi/4$, и затем снова через эллиптическую к линейной поляризации и т. д. Следовательно, такая система может быть использована в качестве преобразователя поляризации волны, а также для создания быстродействующих переключателей.

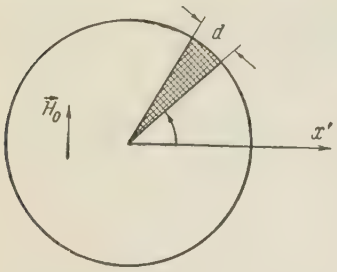


Рис. 4

в) Круглый волновод с тонким ферритовым сектором (рис. 4):

$$\Delta\Gamma = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 d/R}{0{,}8\pi\Gamma}\left\{0{,}30\cos^2(\psi_0' - \varphi_0) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}0{,}25\sin^2(\psi_0' - \varphi_0)\right\} +$$
$$+ 0{,}34\frac{\Gamma}{\pi}\frac{d}{R}\cos^2(\psi_0' - \varphi_0)\left(1 - \frac{1}{\mu\sin^2\psi_0' + \mu_3\cos^2\psi_0'}\right) +$$
$$+ 0{,}15\frac{d}{R}\frac{\varkappa^4 R^2}{\pi\Gamma}\sin 2(\psi_0' - \varphi_0)\left(\mu - 1 - \frac{k^2\sin^2\psi_0'}{\mu\sin^2\psi_0' + \mu_3\cos^2\psi_0'}\right) + \qquad (9)$$
$$+ 0{,}10\frac{d}{R}\frac{\Gamma}{\pi}\sin 2(\psi_0' - \varphi_0)\frac{(\mu_3 - \mu)\sin 2\psi_0'}{\mu\sin^2\psi_0' + \mu_3\cos^2\psi_0'} +$$
$$+ 2\,\mathrm{sign}\,\Gamma\left\{0{,}38\frac{d}{R}\frac{\varkappa}{\pi}\frac{k}{2}\frac{\sin\psi_0'\sin 2(\psi_0' - \varphi_0)}{\mu\sin^2\psi_0' + \mu_3\cos^2\psi_0'} - 0{,}11\frac{d}{R}\frac{\varkappa}{R}\frac{\sin^2(\psi_0' - \varphi_0)\sin\psi_0'}{\mu\sin^2\psi_0' + \mu_3\cos^2\psi_0'}\right\}.$$

Здесь $\varkappa = A_{11}/R$. Значение угла γ_0 видно на рис. 3, направление отсчета угла ψ_0^1 показано на рис. 4. Из формулы (9) следует, что в системе происходит преобразование поляризации волны, а последнее слагаемое определяет невзаимные свойства системы, так как знак перед ним зависит от знака Γ.

В заключение приношу глубокую благодарность А. Г. Гуревичу за ценные указания и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Никольский, Измерение параметров ферритов на СВЧ, Ч. I, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 4, 447.
2. В. В. Никольский, Гиротропное возмущение волновода, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 2, 157.
3. А. Г. Гуревич, Квадратичные соотношения для сред с тензорными параметрами, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 8, 960.

Поступило в редакцию
14 VIII 1959

КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ *pin*-ТРАНЗИСТОРА

Ю. С. Рябинкин

Стремление повысить предельную частоту полупроводниковых усилителей привело к созданию транзисторов типа *pin* (область с собственной проводимостью, ограниченная высокопроводящими *p*- и *n*-областями; вся *pin*-структура в целом находится под отрицательным смещением, инъекцию дырок или электронов в область сильного поля осуществляет металлический контакт к *i*-слою при соответствующем потенциале этого контакта относительно *i*-слоя) [1]. В отличие от хорошо известных *pnp*-(или *npn*-) транзисторов с преимущественно диффузионным механизмом переноса тока, в *pin*-транзисторах ток преимущественно полевой, однако на высоких частотах может стать существенным также влияние диффузии.

Ниже рассчитан коэффициент передачи базы германиевого *pin*-транзистора с учетом диффузии и дрейфа для случая инъекции электронов.

Пренебрегая влиянием тока и искажений в малой окрестности границ вплавления (связанных с наличием инверсионных слоев *p*-и *n*-типов), можно считать напряженность электрического поля E постоянной во всем слое *i*-типа.

Как правило, $E \geqslant 5\cdot 10^3$ *в/см*. При таких значениях E скорость дрейфа электронов в германии $S_n = \mu_n E = \text{const}$, т. е. подвижность $\mu_n \sim 1/E$ [2]. Аналогичная зависимость коэффициента диффузии $D_n(E)$ не была исследована. Найдем ее при помощи функции распределения электронов по энергиям с учетом поля $f(\varepsilon, E)$, выведенной в [2].

Усредняя выражение коэффициента диффузии через скорость и время релаксации $D_n = v^2/3\tau$ $\left(\text{при } E \geqslant 5\cdot 10^3 \text{ } в/см \ \tau = \dfrac{3\hbar\omega_0}{8b_0c_0}\varepsilon^{-1/2}\ [2]\right)$, в обозначениях [2] получим

$$D_n^{\sim}(E) = \frac{\Gamma(1/3)}{4\Gamma(1/2)}\left(\frac{\hbar\omega_0}{b_0c_0m^*}\right)\left[\frac{2a_0b_0c_0m^*}{3\hbar\omega_0e^2}\left(1+\frac{c_{0n}^2}{c_{ak}^2}\right)\right]^{1/6} E^{-1/3} \simeq 1{,}5\cdot 10^3\, E^{-1/3}\ см^2/сек. \qquad (1)$$

При заданной величине отрицательного смещения на *pin*-структуре $E = \text{const}$ и $D_n = \text{const}$. При этом условии решение уравнений непрерывности и тока без учета рекомбинации [3]

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{q}\frac{\partial j_n}{\partial x} = 0, \qquad (2)$$

$$j_n = -qnS_n + qD_n\frac{\partial n}{\partial x} \qquad (3)$$

для гармонического сигнала $[j_n = \tilde{j}_n(x)\, e^{i\omega t},\ n = \tilde{n}(x)\, e^{i\omega t}]$ при $a = S_n/2D_n$, $b = a^2 + i\omega/D_n$ имеет вид

$$\tilde{j}_n(x) = \tilde{j}_0\, e^{ax}\,\frac{a\,\mathrm{sh}\,[(w-x)\sqrt{b}] + \sqrt{b}\,\mathrm{ch}\,[(w-x)\sqrt{b}]}{a\,\mathrm{sh}\,(w\sqrt{b}) + \sqrt{b}\,\mathrm{ch}\,(w\sqrt{b})}\,. \qquad (4)$$

Здесь первое граничное условие $\tilde{j}_n(0) = \tilde{j}_0$ соответствует заданию амплитуды входного сигнала у инъектирующего контакта к *i*-слою ($x = 0$). Второе граничное условие $\tilde{n}(w) = 0$ на границе *i*-слоя и высокопроводящего *n*-слоя коллектора соответствует постоянству концентрации электронов в *n*-области в отсутствие инъекции дырок [4].

По определению коэффициента передачи

$$\beta = \frac{\tilde{j}_n(w)}{\tilde{j}_n(0)} = \frac{\sqrt{b}\,e^{aw}}{a\,\mathrm{sh}\,(w\sqrt{b}) + \sqrt{b}\,\mathrm{ch}\,(w\sqrt{b})}\,. \qquad (5)$$

Легко видеть, что $\beta \to 1$ при $\omega \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\omega \to \infty$, т. е. на высоких частотах влияние диффузии может сильно ослабить выходной сигнал. Из выражения (5) находим амплитудно-частотную характеристику β:

$$|\beta| = \frac{e^{aw}}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t\cos^2 r + \mathrm{sh}^2 t\sin^2 r + \dfrac{a^2}{R^2}\left[\mathrm{sh}^2 t\cos^2 r + \mathrm{ch}^2 t\sin^2 r\right] + \dfrac{a}{R}\left[\mathrm{sh}\,2t\cos\varphi + \sin\varphi\sin 2r\right]}}\,, \qquad (6)$$

где

$$R = \sqrt[4]{a^4 + (\omega/D_n)^4};\quad \varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4\omega D_n}{S_n^2};\quad r = wR\sin\varphi;\quad t = wR\cos\varphi.$$

Так как $\mathrm{sh}^2 t \simeq \mathrm{ch}^2 t \simeq \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t \simeq \frac{1}{4}e^{2t} \gg 1$, то

$$|\beta| \simeq \frac{2\exp(aw - t)}{\sqrt{1 + 2\frac{a}{R}\cos\varphi + \left(\frac{a}{R}\right)^2}}. \qquad (7)$$

Проведенный расчет справедлив и для других полупроводников, если $S_n = \mathrm{const}$ и $D_n = \mathrm{const}$ (для случая дырочной инъекции решение совершенно аналогично).

Из выражения (5) следует, что $\beta \equiv 1$ при $\omega = 0$ и $\beta \to 1$ при $D_n \to 0$, $D_n \to \infty$ или при $S_n \to \infty$. При $S_n \neq 0$ и конечном значении D_n с возрастанием частоты $\beta \to 0$ в результате диффузионного расплывания сигнала. Последний эффект становится существенным, когда «за время пролета» $t_{\text{пр}} = w/S_n$ средняя длина диффузии максимумов гармонически модулированной электронной концентрации $L = 2\sqrt{D_n t_{\text{пр}}}$ станет сравнимой с $\lambda/4 = \pi S_n/2\omega$ (λ — длина волны).

При этом соседние максимумы сливаются и амплитуда переменного сигнала убывает.

Для германия $S_n \simeq 6 \cdot 10^6$ *см/сек*, поэтому при типичных значениях $E = 10^4$ *в/см*, $D_n(E) \simeq 500$ *см*^{2} *сек* и $w = 3 \cdot 10^{-3}$ *см* граничная частота коэффициента передачи составляет около 1000 *Мгц*. Размеры области сильного поля и градиенты концентрации в *pin*-структурах удовлетворяют условиям применимости выражения (3) и функции распределения $f(\varepsilon, E)$, как это следует из оценок, данных в работах [5,6].

ЛИТЕРАТУРА

1. W. W. Gärtner, Proc. I.R.E., 1957, 45, 10, 1392.
2. В. А. Чуенков, ЖТФ, 1958, 28, 3, 470.
3. E. Rittner, Phys. Rev., 1954, 94, 5, 1161.
4. В. Шокли, Теория электронных полупроводников, ИЛ, 1953.
5. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, 1937, 7, 9—10, 1069.
6. Л. Э. Гуревич, Основы физической кинетики, ГИТТЛ, 1940.

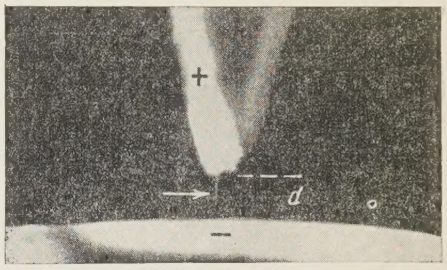
Поступило в редакцию
1 VIII 1959

1960 № 2

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА МЕЖДУ ЭЛЕКТРОДАМИ ВАКУУМНОГО ПРОМЕЖУТКА

При наложении на электроды вакуумного промежутка напряжения несколько ниже пробойного можно ожидать разрыва материала электродов на микровыступах х поверхностей где поле и, следовательно действующие пондеромоторные силы усилены по сравнению с их средними значениями. Пондеромоторные усилия непосредственно перед пробоем обычно не достигают значения временного сопротивления разрыву ($\sigma_в$) большинства электродных материалов. Однако $\sigma_в$ в этой стадии может быть



лед частицы, отделившейся от электрода ри наложении напряжения (указан стрелой).

$p \simeq 1 \cdot 10^{-7}$ *мм* рт. ст.

начительно понижено в отдельных микрообластях электродов вследствие роста микротрещин в процессе приложения растягивающей нагрузки (электрического поля), а также разогрева микроострий автоэлектронными токами. Весьма интересно было и обнаружение явления отрыва полем отдельных кусочков от монолитного электрода.

Нам удалось наблюдать и сфотографировать движение кусочков вещества, отделившихся от поверхности одного из обезгаженных графитовых электродов в промежутке конус (анод) — плоскость, при перелете их к противоположному электроду. На фотографии четко виден след такой частицы, пересекающей промежуток. Одновременно снятые осциллограммы напряжения на электродах промежутка указывали, что пробоя в таких случаях не происходило. Визуализация частиц в полете была достигнута освещением межэлектродного пространства в течение импульса напряжения ($\tau_{имп} \simeq 10^{-3}$ *сек*).

Временное сопротивление разрыву графита $(0{,}5—0{,}75) \cdot 10^8$ *дн/см*^{2} [1]. В условиях наших опытов ($U = 36$ *кв*, $d = 1{,}3$ *мм*, $r_к = 0{,}04$ *см*) пондеромоторные усилия, приводящие к отделению кусочка от электрода, могли достигать $\sim 1 \cdot 10^8$ *дн/см*^{2}, если принять коэффициент усиления поля за счет микронеровностей равным 10, что вполне вероятно. Отделение частицы было зафиксировано нами при восемьдесят пятом нажении напряжения на промежуток. Поэтому маловероятно, чтобы наблюденная нами отделившаяся от электрода частица была частицей, оставшейся после механической обработки электрода и прилипшей к его поверхности. Она не могла образоваться при выбросе материала из электродов при пробое [2], так как наложение нескольких предшествующих импульсов не приводило к пробою промежутка. Скорее следует считать, что мы наблюдали здесь результат разрушения материала электрода на микроучастке поверхности, связанного с постепенным разупрочнением его при повторных наложениях нагрузки. Весьма существенно было бы обнаружить аналогичное явление на металлах

Описанное явление может являться одной из причин изменения во времени рельефа поверхности электродов в вакууме под действием электрического поля. Одновременно при этом обеспечивается обмен веществом в виде целых кусочков между электродами в вакууме, наличие которого было показано другими приемами [3, 4, 5].

Отрыв микрокусочков может привести тем или иным путем к частичному [6] или полному [7] пробою вакуумного промежутка. Вероятно, именно наблюденное явление объясняет до некоторой степени обнаруженную нами ранее связь между напряжением пробоя вакуумного промежутка и механическими константами материала его

анода [8]: при определенных условиях, когда другие факторы, инициирующие пробой в вакууме, не играют существенной роли, именно разрыв и отделение с поверхности кусочка в конечном счете могут привести к созданию в вакуумном промежутке среды для прохождения тока.

Выражаем благодарность В. Л. Грановскому за советы и В. Е. Трофимовой за помощь в проведении опытов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Иванов, Электровакуумная технология, ГЭИ, 1944, стр. 268.
2. Н. Б. Розанова, М. В. Козлова, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 8, 1267.
3. H. W. Anderson, Electr. Engng, 1935, 54, 1315.
4. H. G. Heard, E. J. Lauer, Vacuum, 1953, 3, 104.
5. P. F. Browne, Proc. Roy. Soc. B, 1955, 68, 564.
6. F. Bertein, C. R., Paris, 1946, 222, 64.
7. L. Cranberg, J. Appl. Phys., 1952, 23, 518.
8. Н. Б. Розанова, В. Л. Грановский, ЖТФ, 1956, 26, 489.

Поступило в редакцию
4 VIII 1959

Н. Б. Розанова, В. В. Низяев

CONTENTS

Gusev V. D. Statistic properties of large inhomogeneities in ionosphere . . . 179
Haskind M. D. Excitation of surface electromagnetic waves on flat dielectric coating . . . 188
Cherniak Yu. B. Approximate calculation of the detection characteristics of multichannel systems with correlated noises when selecting the highest amplitudes . . . 198
Mitiashev B. N. On the optimal method of detecting the pulse time position . . 206
Gertsenstein M. E. Phase-frequency distortions in mixers . . . 214
Shirokov V. V. Influence of an amplitude-modulated signal on the double-loop system of an automatic amplification control . . . 218
Ivanov V. N. Variation method of calculation for amulticonductor line 224
Bogdanov E. V., Kislov V. Ya., Chernov Z. S. Interaction of an electronstream with plasma . . . 229
Gaiduk V. I. On the calculation of the induced current caused by the arbitrary movement of charged particles . . . 239
Igritskii A. L. Calculation of the trajectories of electrons in the periodic focuser of TWT . . . 255
Vlasov A. D. On brillouin electron flows and a boundary particle conception 264
Mikaelian A. L., Stoliarov A. K., Koblova M. M. Resonance ferrite systems with a large forward-reverse ratio . . . 269
Monosov Ya. A. On the theory of nonlinear effects observed in ferrit on microwaves. P. II. Parametric phenomena in a ferrite . . . 278
Tychinsky V. P., Derkach Yu. T., Karpetsky V. V. Experimental study of a ferrite amplifier . . . 288
Bunkin F. V. Parametric excitation in quantum systems . . . 296
Berg M. A., Gariainov S. A. Semiconductor two-terminal device with negative resistance . . . 301
Kontorovich M. I. On the question of working out equations for auto-oscillators 310
Melnikov B. S. Formation of a pulse peak in a blocking oscillator using a junction-type triode . . . 323

BRIEF REPORTS

Prossin A. V. The dependence of dissipated power upon the directivity of an aerial . . . 330
Kats A. M. Application of the series to the solution of some problems dealing with travelling-wave tubes and backward-wave tubes . . . 333
Kornilov S. A., Emelianov A. F. Experimental investigation of a klystron frequency divider with a preliminary bunching . . . 336
Yablonskii F. M. Determination of the maximum counting rate of decatron using the plate-cathode characteristics . . . 338
Butrov M. V. On the theory of concentric inhomogeneities of a finite thickness in a coaxial waveguide . . . 341
Maslennikova V. V. Calculation of cylindrical waveguides with a transversal-magnetized ferrite . . . 345
Riabinkin Yu. S. Transmission coefficient of a *pin*-transistor . . . 349

LETTERS TO THE EDITOR

Rozanova N. B., Niziaev V. V. On one method of substance transferring between the electrodes of a vacuum gap . . . 351

Цена 13 руб. 75 коп.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1960 ГОД НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Названия журналов	Номеров в год	Подписная цена	
		годовая	полугодовая
ОБЩЕАКАДЕМИЧЕСКИЕ ЖУРНАЛЫ			
Вестник Академии наук СССР	12	96	48
Доклады Академии наук СССР (без папок)	36	518—40	259—20
Доклады Академии наук СССР (с 6-ю коленкоровыми папками с тиснением)	36	542—40	271—20
Известия Карельского и Кольского филиалов АН СССР	4	28	14
Известия Сибирского отделения АН СССР	12	84	42
Природа	12	84	42
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ			
Акустический журнал	4	48	24
Астрономический журнал	6	99	49—50
Журнал технической физики	12	126	63
Журнал экспериментальной и теоретической физики	12	288	144
Известия Академии наук СССР, серия геофизическая	12	180	90
Известия Академии наук СССР, серия математическая	6	90	45
Известия Академии наук СССР, серия физическая	12	144	72
Кристаллография	6	90	45
Математический сборник	12	144	72
Оптика и спектроскопия	12	162	81
Приборы и техника эксперимента	6	90	45
Теория вероятностей и ее применения	4	45	22—50
Физика твердого тела	12	150	75
ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ			
Высокомолекулярные соединения	12	150	75
Геохимия	8	72	36
Журнал аналитической химии	6	72	36
Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии	6	45	22—50
Журнал неорганической химии	12	270	135
Журнал общей химии	12	330	165
Журнал прикладной химии	12	225	112—50
Журнал физической химии	12	270	135
Известия Академии наук СССР, Отделение химических наук	12	180	99
Коллоидный журнал	6	72	36
Радиохимия	6	72	36
Успехи химии	12	96	48
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ			
Автоматика и телемеханика	12	135	67—50
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Металлургия и топливо	6	75	37—50
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Механика и машиностроение	6	75	37—50
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Энергетика и автоматика	6	75	37—50
Прикладная математика и механика	6	117	58—50
Радиотехника и электроника	12	165	82—50

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ в пунктах подписки Союзпечати, почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на предприятиях и в учреждениях, в научно-исследовательских институтах и учебных заведениях.

Подписка принимается также магазинами «Академкнига» и конторой «Академкнига» по адресу:

Москва, К-12, Б. Черкасский пер., 2/10.

«АКАДЕМКНИГА»